تستهای کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور گروه تجربی در سالهای ۹۳ تا ۹۸ مربوط به مبحث "مشتق"

۱-گزینه ۲

آهنگ متوسط تابع $y=f(x)$ از $x=a$ تا $x=b$ برابر $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ و آهنگ لحظه ای همان مقدار مشتق تابع در آن نقطه است :

آهنگ متوسط : $\dfrac{f(12)-f(4)}{12-4}=\dfrac{25^{-\frac{1}{2}}-9^{-\frac{1}{2}}}{8}=\dfrac{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}{8}=-\dfrac{1}{60}$

آهنگ لحظه ای : $f'(x)=-\dfrac{1}{2}\times 2\times(2x+1)^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}\xrightarrow{x=4}-\dfrac{1}{27}$

بنابراین خواسته مسئله یعنی « آهنگ لحظه ای − آهنگ متوسط » برابر است با :

$$-\frac{1}{60}-(-\frac{1}{27})=\frac{-9+20}{540}=\frac{11}{540}$$

****

۲ -گزینه ۱

آهنگ متوسط تغییر تابع از نقطه $x=4$ تا نقطه $x=6/25$ برابر است با :

$$\frac{f(6/25)-f(4)}{6/25-4}=\frac{2/5-2}{2/25}=\frac{2}{9}$$

آهنگ لحظه ای هم برابر مشتق تابع در نقطه $x=4$ می باشد :

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\xrightarrow{x=4}f'(4)=\frac{1}{4}$$

آهنگ لحظه ای − آهنگ متوسط $=\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{9}=\dfrac{9-8}{36}=\dfrac{1}{36}$

****

۳ -گزینه ۲

ابتدا به سراغ بررسی پیوستگی تابع می رویم . باید مرز را در هر دو ضابطه قرار داده و با هم برابر قرار دهیم

:

$$f\ :\begin{cases}\dfrac{۳}{x}-۵ \xrightarrow{x=۱} -۲\\ x^{۲}+ax+b \xrightarrow{x=۱} a+b+۱\end{cases} \Rightarrow \boxed{a+b=-۳}$$

حال مشتق هر کدام از ضابطه ها را تعیین می کنیم و $x=۱$ را در ضابطه مشتق ها قرار داده و با یکدیگر برابر قرار می دهیم :

$$f'\ :\begin{cases}\dfrac{۳}{x^{۲}} \xrightarrow{x=۱} -۳\\ ۲x+a \xrightarrow{x=۱} ۲+a\end{cases} \Rightarrow ۲+a=-۳ \to \boxed{a=-۵} \to a+b=-۳ \xrightarrow{a=-۵} \boxed{b=۲}$$

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

۴ -گزینه ۱

آهنگ متوسط تغییر تابع از $x=۱$ تا $x=۱/۲۱$ برابر است با :

$$\frac{f(۱/۲۱)-f(۱)}{۱/۲۱-۱}=\frac{۱/۱-۱}{۰/۲۱}=\frac{۱۰}{۲۱}$$

آهنگ لحظه ای تغییر تابع در نقطه $x=۱$:

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \xrightarrow{x=۱} f'(۱)=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین خواسته مسئله برابر است با :

$$\text{آهنگ متوسط} - \text{آهنگ لحظه ای} = \frac{۱}{۲}-\frac{۱۰}{۲۱}=\frac{۲۱-۲۰}{۴۲}=\frac{۱}{۴۲}$$

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

۵-گزینه ۲

اگر توابع مورد نظر را در اطراف ریشه عبارت داخل قدر مطلق تعیین علامت کنیم داریم :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{۳}{۵}x & x\ge ۰\\ x & x<۰\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}۵x & x\ge ۰\\ ۳x & x<۰\end{cases}$$

$$\to fog(x)=\begin{cases}۳x & x\ge ۰\\ ۳x & x<۰\end{cases} \Rightarrow fog(x)=۳x \to (fog)'(x)=۳$$

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

۶-گزینه ۴

$$\text{آهنگ متوسط}:\ \frac{f(1/44)-f(1)}{1/44-1}=\frac{\frac{0/44}{1/2}}{0/44}=\frac{10}{12}$$

$$\text{آهنگ لحظه ای}:\ f'(x)=\frac{\sqrt{x}-\frac{x-1}{2\sqrt{x}}}{x}\xrightarrow{x=1} f'(1)=1$$

$$\text{آهنگ لحظه ای} - \text{آهنگ متوسط} = 1-\frac{10}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

****

۷-گزینه ؟

تابع در $x=\sqrt{2}$ پیوسته نمی باشد و فقط از راست پیوسته است . بنابراین در $x=\sqrt{2}$ مشتق چپ تعریف نشده است که طراح این سوال این نکته را در نظر نگرفته است :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+} f(x)=2\sqrt{2}-4\sqrt{2}=-2\sqrt{2}\\ \lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-} f(x)=2\sqrt{2}-3\sqrt{2}=-\sqrt{2}\end{array}\right\}\Rightarrow -2\sqrt{2}\neq-\sqrt{2}$$

بنابراین فقط $f'_+(\sqrt{2})$ را محاسبه می کنیم :

$$x\to\sqrt{2}^+ \to f(x)=x^3-4x \to f'(x)=3x^2-4 \xrightarrow{x=\sqrt{2}} f'_+(\sqrt{2})=2$$

****

۸-گزینه ۱

ابتدا از حد داده شده هوپیتال می گیریم :

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\xrightarrow{hop}\lim_{x\to2}\frac{f'(x)}{1}=\boxed{f'(2)}$$

مشتق تابع داده شده را محاسبه می کنیم و به جای xها مقدار ۲ را قرار می دهیم :

$$f(x)=\left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^3\to f'(x)=3\left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^2\frac{\frac{-7}{(2x-3)^2}}{2\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}}\to f'(2)=3\left(\sqrt{\frac{2+2}{4-3}}\right)^2\frac{\frac{-7}{(4-3)^2}}{2\sqrt{\frac{2+2}{4-3}}}=3(2)^2\left(\frac{-7}{4}\right)=\boxed{-21}$$

✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽

۹-گزینه ۱

ابتدا از حد داده شده هوپیتال می گیریم : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\xrightarrow{hop}\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(1+h)}{1}=\boxed{f'(1)}$

مشتق تابع داده شده را محاسبه می کنیم و به جای x ها مقدار ۱ را قرار می دهیم :

$$f(x)=\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}\to f'(x)=\frac{\frac{7}{(x+3)^2}}{2\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}}\to f'(1)=\frac{\frac{7}{(1+3)^2}}{2\sqrt{\frac{4+5}{1+3}}}=\left(\frac{\frac{7}{16}}{2\times\frac{3}{2}}\right)=\frac{7}{48}$$

✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽

۱۰-گزینه ۳

ابتدا از حد داده شده هوپیتال می گیریم : $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}\xrightarrow{hop}\lim\limits_{x\to 4}\frac{f'(4)}{1}=\boxed{f'(4)}$

مشتق تابع داده شده را محاسبه می کنیم و به جای x ها مقدار ۴ را قرار می دهیم :

$$f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{5-2x}\to f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(5-2x)-(-2)(1+\sqrt{x})}{(5-2x)^2}\to f'(4)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{4}}(5-8)-(-2)(1+\sqrt{4})}{(5-8)^2}=\frac{\frac{21}{4}}{9}=\boxed{\frac{7}{12}}$$

✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽

۱۱-گزینه ۲

ضابطه ی دوم در تابع داده شده به صورت زیر اصلاح شود :

$$-x^2+ax+b$$

ابتدا به سراغ بررسی پیوستگی تابع می رویم . باید مرز را در هر دو ضابطه قرار داده و با هم برابر قرار دهیم :

$$f:\begin{cases}\frac{1}{x-1}\xrightarrow{x=2} 1\\ -x^2+ax+b\xrightarrow{x=2} -4+2a+b\end{cases}\Rightarrow\boxed{2a+b=5}$$

حال مشتق هر کدام از ضابطه ها را تعیین می کنیم و $x=2$ را در ضابطه مشتق ها قرار داده و با یکدیگر برابر قرار می دهیم :

$$f' : \begin{cases} \dfrac{-۱}{(x-۱)^۲} \xrightarrow{x=۲} -۱ \\ -۲x+a \xrightarrow{x=۲} -۴+a \end{cases} \Rightarrow \boxed{-۴+a=-۱} \rightarrow \boxed{a=۳} \xrightarrow{\boxed{۲a+b=۵}} \boxed{b=-۱}$$

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

۱۲ -گزینه ۱

در این تست با مشتق تابع مرکب مواجه هستیم و بدون توجه به داده ها و خواسته ها به سراغ مشتق تابع مرکب داده شده می رویم :

$$(fog)(x) \xrightarrow{(fog)'(x)} g'(x)f'(g(x)) \xrightarrow{x=۲} \underbrace{g'(۲)}_{-۳}f'(\underbrace{g(۲)}_{۵})=۶ \rightarrow -۳f'(۵)=۶ \rightarrow \boxed{f'(۵)=-۲}$$

$$g(x)=\frac{۲x+۱}{x-۱} \rightarrow \begin{cases} g(۲)=۵ \\ g'(۲)=\dfrac{-۲-۱}{(۲-۱)^۲}=-۳ \end{cases}$$

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

۱۳-گزینه ۲

آهنگ متوسط : $\dfrac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱}=\dfrac{(۸-\frac{۱}{۴})-(\frac{۱}{۲}-۱)}{۳}=\dfrac{\frac{۳۱}{۴}+\frac{۱}{۲}}{۳}=\dfrac{\frac{۳۳}{۴}}{۳}=\boxed{\dfrac{۱۱}{۴}}$

آهنگ لحظه ای : $f'(x)=x+\dfrac{۱}{x^۲} \xrightarrow{x=۲} \boxed{f'(۲)=\dfrac{۹}{۴}}$

آهنگ متوسط منهای آهنگ لحظه ای $=\dfrac{۱۱}{۴}-\dfrac{۹}{۴}=\dfrac{۲}{۴}=\dfrac{۱}{۲}=\boxed{۰/۵}$

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

۱۴ -گزینه ۳

ابتدا از حد داده شده هوپیتال می گیریم : $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(\frac{۱}{۴}+h)-f(\frac{۱}{۴})}{h} \xrightarrow{hop} \lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f'(\frac{۱}{۴}+h)}{۱}=\boxed{f'(\frac{۱}{۴})}$

مشتق تابع داده شده را محاسبه می کنیم و به جای xها مقدار $\dfrac{۱}{۴}$ را قرار می دهیم :

$$f(x)=\frac{-x-۱}{\sqrt{x}}\rightarrow f'(x)=\frac{(-۱)(\sqrt{x})-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(-x-۱)}{(\sqrt{x})^۲}\rightarrow f'(\frac{۱}{۴})=\frac{(-۱)(\sqrt{\frac{۱}{۴}})-\frac{۱}{(۲)(\sqrt{\frac{۱}{۴}})}(-\frac{۱}{۴}-۱)}{(\sqrt{\frac{۱}{۴}})^۲}=\frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۱}{۴}}=\boxed{۳}$$

****

۱۵ -گزینه ۳

ضابطه ی دوم در تابع داده شده و همچنین گزینه ها به صورت زیر اصلاح شود :

$-x^۳+۶x$

۱(۱   ۲(۲   ۳(۳   ۴(۴

ابتدا به سراغ بررسی پیوستگی تابع می رویم . باید مرز را در هر دو ضابطه قرار داده و با هم برابر قرار دهیم :

$$f:\begin{cases}\frac{۸}{ax+b}\xrightarrow{x=۲}\frac{۸}{۲a+b}\\ -x^۳+۶x\xrightarrow{x=۲}۴\end{cases}\Rightarrow\frac{\cancel{۸}^{\,۲}}{۲a+b}=\cancel{۴}^{\,۱}\Rightarrow\boxed{۲a+b=۲}$$

حال مشتق هر کدام از ضابطه ها را تعیین می کنیم و $x=۲$ را در ضابطه مشتق ها قرار داده و با یکدیگر برابر قرار می دهیم :

$$f':\begin{cases}\frac{-۸a}{(ax+b)^۲}\xrightarrow{x=۲}\frac{-۸a}{(۲a+b)^۲}\\ -۳x^۲+۶\xrightarrow{x=۲}-۶\end{cases}\Rightarrow\frac{-\cancel{۸}a}{\underbrace{(۲a+b)^۲}_{۲}}=\cancel{-۶}\Rightarrow\frac{-۴a}{۴}=-۳\rightarrow\boxed{a=۳}\xrightarrow{۲a+b=۲}\boxed{b=-\frac{۱}{۲}}$$

****

۱۶ -گزینه ۲

مشتق تابع را در نقطه داده شده محاسبه می کنیم و عدد ۳ را قرار می کنیم . مشتق و عدد گذاری هم زمان را انجام می دهیم :

$$f'(-۳)=(۱)\sqrt[۳]{\frac{۳(-۳)+۱}{-۳+۲}}+\frac{\frac{۶-۱}{(-۳+۲)^۲}}{۳\sqrt[۳]{\left(\frac{۳(-۳)+۱}{-۳+۲}\right)^۲}}(-۳)=\sqrt[۳]{۸}+\frac{۵}{۳\sqrt[۳]{۸^۲}}(-۳)=۲-\frac{۱۵}{۱۲}=۲-\frac{۵}{۴}=\boxed{\frac{۳}{۴}}$$

۱۷-گزینه ۳

صحبت از خط مماس بر تابع پیش آمده است ، پس نیازمند شیب و نقطه هستیم . بازه ای داده شده است که این بازه عملا دو نقطه محسوب می شود . این دو نقطه را در تابع قرار می دهیم تا عرض آنها تعیین شود و سپس شیب خط واصل میان این دو نقطه را تعیین می کنیم و برابر با مشتق تابع قرار می دهیم تا طول نقطه ی مورد نظر پیدا شود (شرایط هندسی این مسئله را در ذهن خود تجسم کنید . البته نمونه های متعددی از این سبک مثال در جزوه وجود دارد) :

$$m=\frac{f(۸)-f(۰)}{۸-۰}=\frac{(\frac{۳۲-۵}{۸+۱})-(\frac{۰-۵}{۰+۱})}{۸-۰}=\frac{۳+۵}{۸}=\frac{۸}{۸}=\boxed{۱}$$

$$f'(x)=\frac{۹}{(x+۱)^۲}\ \rightarrow\ f'(x)=۱\ \rightarrow\ \frac{۹}{(x+۱)^۲}=۱\ \rightarrow\ (x+۱)^۲=۹\ \rightarrow \begin{cases} x+۱=۳\rightarrow \boxed{x=۲} \\ x+۱=-۳\rightarrow \boxed{x=-۴}\ \times \end{cases}$$

دو مقدار به دست آمده برای x طولهایی از تابع $f(x)$ هستند که مماس در آن نقاط موازی خط واصل میان دو نقطه به طول های صفر و ۸ می باشد . حال باید معادله ی خط مماس بر تابع $f(x)$ را در نقطه ای به طول ۲ تعیین کنیم (نقطه $x=-۴$ خارج از بازه ی داده شده است)

$$x_۰=۲\ \rightarrow\ y_۰=۱\ ,\ m=۱\ \rightarrow\ y-۱=(۱)(x-۲)\rightarrow\ \boxed{y=x-۱}$$

محل برخورد این خط مماس با محور عرض ها جائیست که طول برابر با صفر است در واقع عرض از مبدا این خط ، <u>۱-</u> خواهد بود .

۱۸-گزینه ۲

با مشتق تابع شامل براکت و قدر مطلق مواجه هستیم ، بنابراین در اولین اقدام باید تکلیف قدر مطلق و براکت را مشخص کنیم . قدرمطلق را با علامت مناسب و براکت را با عدد مناسب جایگزین می کنیم :

$$f(x)=([x]-|x|)(\sqrt[۳]{۹x}) \xrightarrow{-۳^+} ((-۳)-(-x))(\sqrt[۳]{۹x}) = \boxed{(x-۳)(\sqrt[۳]{۹x})}$$

$$f'(x)=(۱)(\sqrt[۳]{۹x})+\frac{۹}{۳\sqrt[۳]{(۹x)^۲}}(x-۳) \xrightarrow{x=-۳} f'_+(-۳)=\sqrt[۳]{-۲۷}+\frac{۳}{\sqrt[۳]{(-۲۷)^۲}}(-۶)=$$

$$-۳+\frac{-۱۸}{۹}=-۳-۲=\boxed{-۵}$$

❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊

۱۹-گزینه ۱

همانند تست شماره ۵ و توجه به این موضوه که ریشه عبارت درون قدرمطلق هر دو تابع یکسان است . ابتدا قدرمطلق ها را حذف کرده و سپس ترکیب دو تابع داده شده را انجام می دهیم :

$$f(x)=\begin{cases}۳x+x & x\geq ۰\\ ۳x-x & x<۰\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}\frac{۳}{۴}x+ax & x\geq ۰\\ \frac{۳}{۴}x-ax & x<۰\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}۴x & x\geq ۰\\ ۲x & x<۰\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}(\frac{۳}{۴}+a)x & x\geq ۰\\ (\frac{۳}{۴}-a)x & x<۰\end{cases} \rightarrow gof(x)=\begin{cases}۴((\frac{۳}{۴}+a)x) & x\geq ۰\\ ۲((\frac{۳}{۴}-a))x & x<۰\end{cases}$$

تابع gof تشکیل شده است و شرط مشتق پذیری این تابع در مبدا مختصات پیوستگی و مشتق پذیری تابع در نقطه صفر است . $x=۰$ را در ضابطه های بالا و پائین قرار می دهیم که به تساوی بدیهی $۰=۰$ می

رسیم . حال از دو ضابطه مشتق می گیریم و مشتق ها را برابر قرار می دهیم :

$$gof(x)=\begin{cases}4((\frac{3}{4}+a)x) & x\geq 0\\ 2((\frac{3}{4}-a))x & x<0\end{cases}\rightarrow (gof)'(x)=\begin{cases}4(\frac{3}{4}+a) & x\geq 0\\ 2(\frac{3}{4}-a) & x<0\end{cases}\rightarrow 4(\frac{3}{4}+a)=2(\frac{3}{4}-a)$$

$$3+4a=\frac{3}{2}-2a\rightarrow 6a=-\frac{3}{2}\rightarrow \boxed{a=-\frac{3}{12}=-\frac{1}{4}}$$

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

۲۰ – گزینه ۱

ابتدا شیب خط داده شده را با مرتب سازی معادله ی خط ، تعیین می کنیم که به $\frac{m}{m+2}$ می رسیم . مماس بر منحنی تابع داده شده به معنای مشتق تابع است . بنابراین از تابع مورد نظر مشتق می گیریم که به $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ می رسیم . شیب خط داده شده را باید برابر با مشتق تابع قرار دهیم که به معادله ی $\frac{m}{m+2}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ می رسیم . حل این معادله کمی پیچیده و غیر منطقی به نظر می رسد بنابراین باید راه دیگری را در پیش بگیریم . با کمی توجه به تابع مشتق ، معلوم می شود که با کسری مواجه هستیم که همواره در بازه ی (۱ و ۱–) قرار دارد . بنابراین عبارت $\frac{m}{m+2}$ هم باید در این بازه باشد که مارا با نامعادله ی $-1<\frac{m}{m+2}<1$ مواجه می کند :

$$-1<\frac{m}{m+2}<1\rightarrow\begin{cases}\frac{m}{m+2}<1\rightarrow\frac{m}{m+2}-1<0\rightarrow\frac{m-m-2}{m+2}<0\rightarrow\frac{-2}{m+2}<0\rightarrow\boxed{m>-2}\\ -1<\frac{m}{m+2}\rightarrow 0<\frac{m}{m+2}+1\rightarrow 0<\frac{m+m+2}{m+2}\rightarrow 0<\frac{2m+2}{m+2}\rightarrow\\ \boxed{+}\ -2\ \boxed{-}\ -1\ \boxed{+}\rightarrow\boxed{m<-2}\ \text{or}\ \boxed{m>-1}\end{cases}$$

با اشتراک گیری از مجموعه جوابهای به دست آمده به بازه ی $\boxed{m>-1}$ می رسیم .

❋ این تست در ارزیابی سوالات کنکور ۹۵ یکی از سخت ترین سوالات کنکور توسط اکثریت اساتید ارزیابی شد ❋

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

۲۱ - گزینه ۳

دربرخورد با حدهایی که بـا تعریـف مشـتق در ارتبـاط هسـتند اولـین اقـدام هوپیتـال گیـری از حـد داده شـده اسـت کـه استفاده از قوانین مشتق تابع مرکب هم در این نوع هوپیتال گیری ها به کار می آید :

$$\text{hop}: \lim_{x\to ۲} \frac{۲f(x)f'(x)-۴f'(x)}{۱}=\frac{۲f(۲)f'(۲)-۴f'(۲)}{۱}$$

ملاحظه می شود که مقادیر $f(۲)\ ,\ f'(۲)$ در این حـد ظـاهر شـدند کـه بایـد بـا اسـتفاده از اطلاعـات موجـود در مسـئله آنهـا را تعیـین کنـیم ، خـط $y=۳x-۲$ در نقطـه $x=۲$ بـر تـابع مماس اسـت بنـابراین مـی تـوانیم مقـادیر $f(۲)\ ,\ f'(۲)$ را با استفاده از این خط به دست بیاوریم و در جواب حد قرار دهیم :

$$y=۳x-۲:\begin{cases} f(۲)=۴ \\ f'(۲)=۳ \end{cases} \to \frac{۲(۴)(۳)-۴(۳)}{۱}=\boxed{۱۲}$$

****

۲۲-گزینه ۲

شرط مماس شدن دو تابع بر یکدیگر این است کـه معادلـه ی تلاقـی دو تـابع ریشـه ی مضـاعف داشـته باشـد . بـه عبارت دیگر دو تابع را با یکـدیگر برابـر قـرار مـی دهـیم و بـه یـک معادلـه ی درجـه دوم مـی رسـیم کـه بـرای داشتن ریشه ی مضاعف در این معادله ی درجه دوم ، باید دلتای این معادله برابر با صفر باشد :

$$-۳x+۲=\frac{x^۲+a}{x-۲} \to -۳x^۲+۸x-۴=x^۲+a \to ۴x^۲-۸x+a+۴=۰$$

$$\Delta=۰ \to ۶۴-(۴)(۴)(a+۴)=۰ \xrightarrow{\div ۱۶} ۴-a-۴=۰ \to \boxed{a=۰}$$

****

۲۳ -گزینه ۳

ابتدا از حد داده شده هوپیتال می گیریم :

$$\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)+۷}{x-۴}=-\frac{۳}{۲}\xrightarrow{hop}\lim_{x\to ۴}\frac{f'(۴)}{۱}=-\frac{۳}{۲}\to \boxed{f'(۴)=-\frac{۳}{۲}}$$

همانطور که می دانیم این نوع حدهاباید به صـورت صـفر صـفرم باشـند ، بنـابراین صـورت کسـر بـه ازای $x=۴$ بایـد صـفر باشد که از آنجا $\boxed{f(۴)=-۷}$ به دست مـی آیـد . بـا داشـتن $f'(۴), f(۴)$ ، بـه سـراغ مشـتق تـابع عبـارت $\frac{f(۲x)}{x}$ مـی رویم که ترکیبی از مشتق تابع مرکب و مشـتق تـابع کسـری اسـت .مشـتق عبـارت داده شـده را محاسـبه مـی کنـیم و بـه جای xها مقدار ۲ را قرار می دهیم :

$$\left(\frac{f(۲x)}{x}\right)' = \frac{(۲f'(۲x))(x)-(۱)(f(۲x))}{x^۲} \xrightarrow{x=۲} \frac{(۲f'(۴))(۲)-(۱)(f(۴))}{۲^۲}$$

$$= \frac{(۲(\frac{-۳}{۲}))(۲)-(۱)(-۷)}{۴} = \frac{-۶+۷}{۴} = \boxed{\frac{۱}{۴}}$$

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

۲۴ -گزینه ۴

این تست دقیقا همانند تست قبل می باشد ، ابتدا از حد داده شده هوپیتال می گیریم :

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(-۲+h)+۳}{h} = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{hop} \lim_{h\to ۰} \frac{f'(-۲)}{۱} = \frac{۱}{۲} \to \boxed{f'(-۲)=\frac{۱}{۲}}$$

همانطور که می دانیم این نوع حدها باید به صورت صفر صفرم باشند ، بنابراین صورت کسر به ازای $h=۰$ باید صفر باشد که از آنجا $\boxed{f(-۲)=۳}$ به دست می آید . با داشتن $f'(-۲)$, $f(-۲)$ ، به سراغ مشتق تابع عبارت $x^۲f(x)$ می رویم که ترکیبی از مشتق تابع مرکب و مشتق تابع ضرب است . مشتق عبارت داده شده را محاسبه می کنیم و به جای xها مقدار ۲- را قرار می دهیم :

$$\left(x^۲f(x)\right)' = ۲xf(x)+f'(x)(x^۲) \xrightarrow{x=-۲} (-۴)f(-۲)+(f'(-۲))(۴) = (-۴)(-۳)+(\frac{۱}{۲})(۴) = ۱۲+۲ = \boxed{۱۴}$$

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

۲۵ -گزینه ۳

ابتدا از حد داده شده هوپیتال می گیریم :

$$\lim_{h\to ۰^+} \frac{f(۱+h)-f(۱)}{h} = \xrightarrow{hop} \lim_{h\to ۰^+} \frac{f'(۱^+)}{۱} = \boxed{f'(۱^+)}$$

با مشتق تابع شامل براکت و قدر مطلق مواجه هستیم ، بنابراین در اولین اقدام باید تکلیف قدر مطلق و براکت را مشخص کنیم . قدرمطلق را با علامت مناسب و براکت را با عدد مناسب جایگزین می کنیم :

$$f(x) = \sqrt{x^۲-[x]+|x|} \xrightarrow{۱^+} f(x) = \sqrt{x^۲-۱+x}$$

$$f'(x) = \frac{۲x+۱}{۲\sqrt{x^۲-۱+x}} \xrightarrow{x=۱} f'_+(۱) = \frac{۳}{۲\sqrt{۱^۲-۱+۱}} = \boxed{\frac{۳}{۲}}$$

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

۲۶ -گزینه ۱

برای تعیین معادله ی خط قائم بر نمودار یک تابع نیازمند شیب و مختصات نقطه ی مورد نظر هستسم . در صورت سوال تلاقی با محور عرض ها مطرح شده است یعنی طول نقطه ی مورد نظر صفر است . حال باید $x=0$ را یک بار درد تابع داده شد و یک بار هم در مشتق تابع داده شده قرار دهیم تا عرض و شیب به دست بیاید :

$$x=0 \to \begin{cases} y_0=f(0)=\dfrac{\cos(0)}{2-\sin(0)}=\boxed{\dfrac{1}{2}} \\[2ex] m=f'(0)=\dfrac{\overbrace{(-2\sin(0))(3-\sin(0))}^{0}-\overbrace{(-\cos(0))}^{1}\overbrace{(\cos(0))}^{2}}{\underbrace{(2-\sin(0))^2}_{4}}=\boxed{\dfrac{1}{4}} \end{cases} \to \boxed{\begin{array}{l} y-(\frac{1}{2})=-4(x-0) \\ \to \boxed{y=-4x+\frac{1}{2}} \end{array}}$$

با به دست آمدن معادله خط قائم ، کافیست محل برخورد نمودار تابع را با نیمساز ناحیه اول و سوم به دست آوریم :

$$x=-4x+\frac{1}{2} \to 5x=\frac{1}{2} \to x=\frac{1}{10}=\boxed{0/1}$$

****

۲۷ -گزینه ۴

ابتدا از حد داده شده هوپیتال می گیریم :

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\xrightarrow{hop}\lim_{h\to 0^-}\frac{f'(3^-)}{1}=\boxed{f'(3^-)}$$

با مشتق تابع شامل براکت و قدر مطلق مواجه هستیم ، بنابراین در اولین اقدام باید تکلیف قدر مطلق و براکت را مشخص کنیم . قدرمطلق را با علامت مناسب و براکت را با عدد مناسب جایگزین می کنیم :

$$f(x)=\frac{x^2}{|1-x|}[x] \xrightarrow{3^-} f(x)=\frac{x^2}{x-1}(2)$$

$$f'(x)=\frac{(4x)(x-1)-(1)(2x^2)}{(x-1)^2} \xrightarrow{x=3} f'_-(3)=\frac{24-18}{4}=\boxed{\frac{3}{2}}$$

✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽

۲۸ -گزینه ۳

ابتدا از حد داده شده هوپیتال می گیریم :

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\frac{۴}{۳}\xrightarrow{hop}\lim_{x\to ۲}\frac{f'(۲)}{۱}=\frac{۴}{۳}\to \boxed{f'(۲)=\frac{۴}{۳}}$$

مشتق تابع مرکب fog در نقطه ی $x=۱$ خواسته شده است . باز شده ی مشتق تابع fog در نقطه ی یک به صورت $(fog)'(۱)=g'(۱)f'(g(۱))$ خواهد بود . تابع g داده شده است . بنابراین مقدار $g(۱)=۲$ به دست می آید و مقدار $g'(۱)$ هم با مشتق گیری از تابع g و جایگذاری عدد یک در تابع مشتق به صورت زیر به دست می آید :

$$g'(x)=۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\to \boxed{g'(۱)=\frac{۳}{۲}}$$

با مقادیر به دست آمده و جایگذاری در عبارت $(fog)'(۱)=g'(۱)f'(g(۱))$ ، خواسته ی سوال تامین می شود :

$$(fog)'(۱)=g'(۱)f'(g(۱))=(\frac{۳}{۲})(\underbrace{f'(۲)}_{\frac{۴}{۳}})=\boxed{۲}$$

✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽

۲۹ -گزینه ۲

ابتدا به سراغ بررسی پیوستگی تابع می رویم . باید مرز را در هر دو ضابطه قرار داده و با هم برابر قرار دهیم . در ضابطه ی بالا با قدرمطلق روبرو هستیم که برای مشتق گیری باید با توجه به هم دامنه ی مقابل ضابطه ی بالا ، قدرمطلق را با علامت مناسب حذف کنیم و سپس مشتق بگیریم :

$$f:\begin{cases}|x^۲-۲x|\xrightarrow{x=۲}\circ\\ \frac{۱}{۲}x^۲+ax+b\xrightarrow{x=۲}۲+۲a+b\end{cases}\Rightarrow \boxed{۲a+b=-۲}$$

حال مشتق هر کدام از ضابطه ها را تعیین می کنیم و $x=۲$ را در ضابطه مشتق ها قرار داده و با یکدیگر برابر قرار می دهیم در ضابطه ی بالا خواهیم داشت : $۲^-:|x^۲-۲x|=-x^۲-۲x$:

$$f' : \begin{cases} -2x+2 \xrightarrow{x=2} -2 \\ x+a \xrightarrow{x=2} 2+a \end{cases} \Rightarrow \boxed{2+a=-2} \to \boxed{a=-4} \xrightarrow{\boxed{2a+b=-2}} \boxed{b=6} \to \boxed{a+b=2}$$

****

۳۰ -گزینه ۴

آهنگ متوسط : $\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0} = \dfrac{(4)\sqrt{9}-(2)(\sqrt{1})}{2} = \dfrac{12-2}{2} = \boxed{5}$

آهنگ لحظه ای : $f'(x) = (1)(\sqrt{4x+1}) + \dfrac{4(x+2)}{2\sqrt{4x+1}} \xrightarrow{x=\frac{3}{4}} (1)(2) + \dfrac{4}{(2)(2)}(\dfrac{11}{4}) = 2 + \dfrac{11}{4} = \dfrac{19}{4}$ $\boxed{f'(\frac{3}{4}) = \frac{19}{4}}$

آهنگ متوسط منهای آهنگ لحظه ای $= 5 - \dfrac{19}{4} = \dfrac{1}{4} = \boxed{0/25}$

****

۳۱ -گزینه ۴

خط $y = 3x-5$ بر تابع g مماس است بنابراین عرض و شیب این خط همان عرض و مشتق تابع در نقطه ی $x=2$ است و بالعکس . به عبارت دیگر از اطلاعات خط مماس ، به اطلاعات تابع می رسیم . شیب خط داده شده برابر ۳ است . بنابراین $g'(2)=3$ می باشد . با جایگذاری $x=2$ در خط $y=3x-5$ ، عرض تماس برابر با ۱ خواهد بود و یا به عبارت دیگر $g(2)=1$ می شود . از حد داده شده هم هوپیتال میگیری که خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{2x-2} = \frac{2}{3} \xrightarrow{hop} \lim_{x\to 1} \frac{f'(1)}{2} = \frac{2}{3} \to \boxed{f'(1) = \frac{4}{3}}$$

با داشتن اطلاعات فوق به سراغ مشتق تابع مرکب داده شده می رویم :

$$(fog)'(2) = \underbrace{g'(2)}_{3} f'(\underbrace{g(2)}_{1}) = (3)\underbrace{f'(2)}_{\frac{4}{3}} = \boxed{4}$$

****

۳۲ -گزینه ۳

م یدانیم ریشه های ساده داخل قدرمطلق ، طول نقاط مشتق ناپذیر تابع هستند . بنابراین کافیست ریشه های عبارت x^3-2x را بیابیم که به اعداد $x^3-2x=0 \to x(x^2-2)=0 \to x=0 , -\sqrt{2} , \sqrt{2}$ می

رسیم . پس تابع در ۳ نقطه مشتق ناپذیر است . توجه داریم که نقطه ی $x=0$ ریشه ی مخرج است و متعلق به دامنه نیست و عملا نباید در مورد مشتق پذیری آن بحث شود ، اما با توجه به مثال صفحه ۱۱۸ کتاب حسابان ۲ ، این نقطه را هم به عنوان نقطه ی مشتق ناپذیر در نظر می گیریم .

****

۳۳ -گزینه ۲

آهنگ متوسط : $\dfrac{f(4)-f(0)}{4-0}=\dfrac{(3+\frac{1}{5})-(1+1)}{4}=\dfrac{\frac{6}{5}}{4}=\boxed{\dfrac{3}{10}=0/3}$

آهنگ لحظه ای : $f'(x)=\dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}}+\dfrac{-1}{(x+1)^2}\xrightarrow{x=\frac{3}{2}}\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{25}=\dfrac{17}{50}\rightarrow\boxed{f'(\frac{3}{2})=\dfrac{34}{100}=0/34}$

آهنگ متوسط منهای آهنگ لحظه ای $=0/34-0/3=\boxed{0/04}$

****