تستهای کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور گروه تجربی در سالهای ۹۳ تا ۹۸ مربوط به مبحث " دایره و بیضی "

۱ – گزینه ۱

نقاط داده شده را در معادله گسترده دایره ، جایگذاری کرده و مقادیر مجهول c , b , a را پیدا می کنیم :

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \rightarrow \begin{cases}(0,0) \rightarrow \boxed{c=0} \\ (2,1) \rightarrow 2a+b=-5 \\ (1,-2) \rightarrow a-2b=-5\end{cases} \rightarrow \boxed{b=1 \quad , \quad a=-3}$$

$$\rightarrow x^2+y^2-3x+y=0 \rightarrow O\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right) \rightarrow \boxed{R=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}}$$

****

۲ – گزینه ۲

ابتدا مرکز و شعاع دایره $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ را بدست می آوریم :

$$O(1,-2) \rightarrow R=\sqrt{1+4-1}=2$$

شرط اینکه دو دایره مماس خارج باشند ، $OO'=R+R'$ می باشد :

$$OO'=\sqrt{9+16}=5$$

$$OO'=R+R' \xrightarrow[R=2]{OO'=5} 2+R'=5 \rightarrow \boxed{R'=3}$$

****

۳ – گزینه ۱

فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره ، برابر شعاع دایره می باشد . بنابراین با استفاده از رابطه $d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ، شعاع دایره را محاسبه می کنیم :

$$d=\frac{|2-(-1)-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \rightarrow r=\sqrt{2}$$

حال به کمک مرکز دایره و شعاع به دست آمده ، معادله دایره را مشخص می کنیم : $(x-2)^2+(y+1)^2=2$

در نقطه ای که دایره محور x ها را قطع می کند ، $y=0$ می باشد . لذا با جایگذاری مقدار صفر برای y در معادله دایره ، طول نقطه تلاقی را بدست می آوریم :

$$(x-2)^2+(y+1)^2=2 \xrightarrow{y=0} (x-2)^2+(0+1)^2=2 \to (x-2)^2=1 \to x-2=\pm 1 \to \begin{cases} \boxed{x=1} \\ \boxed{x=3} \end{cases}$$

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

۲ - گزینه ۲

ابتدا مرکز و شعاع دایره $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ را بدست می آوریم :

$$O(1,-2) \quad \to \quad R=\sqrt{1+4-1}=2$$

شرط اینکه دو دایره مماس خارج باشند ، $OO'=R+R'$ می باشد :

$$OO'=\sqrt{9+16}=5$$

$$OO'=R+R' \xrightarrow[R=2]{OO'=5} 2+R'=5 \to \boxed{R'=3}$$

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

۴ - گزینه ۳

با توجه به اینکه مرکز دایره روی نیمساز ربع اول و سوم یعنی خط $y=x$ ، واقع است ، مختصات آن را به صورت $O(\alpha\,,\alpha)$ در نظر می گیریم . همچنین دایره در نقاطی به طول های ۱ و ۳ محور x ها را قطع می کند ، لذا این نقاط یعنی $A(1,0)$ و $B(3,0)$ روی دایره قرار دارند . می دانیم فاصله مرکز دایره تا هر نقطه روی دایره برابر شعاع دایره می باشد ، بنابراین فاصله OA برابر OB و برابر شعاع دایره می باشد :

$$\left.\begin{aligned} OA&=\sqrt{(\alpha-1)^2+\alpha^2} \\ OB&=\sqrt{(\alpha-3)^2+\alpha^2} \end{aligned}\right\} \to R=OA=OB \to (\alpha-1)^2+\alpha^2=(\alpha-3)^2+\alpha^2$$

$$\to \alpha^2-2\alpha+1+\alpha^2=\alpha^2-6\alpha+9+\alpha^2 \to 4\alpha=8 \to \underline{\alpha=2}|$$

$$R=OA=\sqrt{(\alpha-1)^2+\alpha^2} \xrightarrow{\alpha=2} \boxed{R=\sqrt{(2-1)^2+2^2}=\sqrt{5}}$$

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

۵ - گزینه ۲

نقطه ی داده شده در ناحیــه چهارم اسـت و معادلــه ی دایــره ای کــه در ناحیــه ی چهــارم بــر محورهــای مختصــات ممــاس اســت بــه صــورت $(x-R)^2+(y+R)^2=R^2$ مــی باشــد زیــر مرکــز دایــره در ایــن حالــت بــه صــورت $(R\,,-R)$ مــی باشد . حال با جایگذاری نقطه ی داده شده در معادله ی دایره ، شعاع دایره را پیدا می کنیم :

$$(x-R)^2+(y+R)^2=R^2 \xrightarrow{(1,-2)} (1-R)^2+(-2+R)^2=R^2$$

$$R^2-2R+1+R^2-4R+4=R^2 \rightarrow R^2-6R+5=0 \rightarrow \boxed{R=1\,,5}$$

****

۶ - گزینه ۴

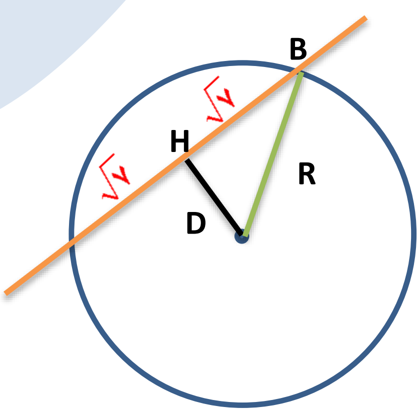
دو نقطه ی داده شده از نظر عرضی باهم فرق دارنــد در نتیجــه بیضــی قــائم اســت . فاصــلـه ی میــان ایــن دو نقطــه ۸ اســت و ازآنجا $c=4$ به دست می آید . قطر کوچک بیضی ۶ اســت بنــابراین مقــدار b هــم ۳ بــه دســت مــی آیــد . بــا کمــک رابطــه ی فیثاغورث میان $c\,,b\,,a$ ، مقدار a هم به دست می آید و خروج از مرکز بیضی هم تعیین می شود :

$$b^2+c^2=a^2 \xrightarrow{b=3\ ,\ c=4} 9+16=a^2 \rightarrow \boxed{a=5} \quad , \quad e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}=\boxed{0/8}$$

****

۷ - گزینه ۱

ابتدا باید معادله دایره را بنویســیم و ســپس بــا خــط $y=2$ تلاقــی دهــیم . بــرای نوشــتن معادلــه دایــره ، نیازمنــد مرکــز و شعاع دایره هستیم . مرکز دایره که داد شده است و بـا کمـک طـول وتـر داده شـده و یـافتن فاصـلـه ی مرکـز دایـره از خـط مورد نظر و کمک گرفتن از رابطه ی فیثاغورث ، شعاع دایره را هم پیدا می کنیم :



$$\left.\begin{array}{c} 2x-3y+1=0 \\ A(-1\,,4) \end{array}\right\} \rightarrow D=\frac{|-2-12+1|}{\sqrt{13}}=\frac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$$

$$D^2+HB^2=R^2 \rightarrow 13+7=R^2 \rightarrow \boxed{R=\sqrt{20}}$$

$$(x+1)^2+(y-4)^2=20 \xrightarrow{y=2} (x+1)^2+(2-4)^2=20$$

$$(x+1)^2=16 \rightarrow \begin{cases} x+1=4 \rightarrow \boxed{x=3} \\ x+1=-4 \rightarrow \boxed{x=-5} \end{cases}$$