تستهای کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور گروه تجربی در سالهای ۹۳ تا ۹۸ مربوط به مبحث " لگاریتم "

۱-گزینه ۴

ابتدا به سراغ فرض مسئله می رویم و به کمک ویژگی های لگاریتم آن را ساده کرده و x را پیدا می کنیم :

$$\log_x^{x^2+4} - \log_x^5 = 1 \rightarrow \log_x^{\frac{x^2+4}{5}} = 1 \rightarrow \frac{x^2+4}{5} = x \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

از مقادیر فوق $x = 4$ قابل قبول است زیرا پایه لگاریتم باید بزرگتر از صفر و مخالف یک باشد .

اکنون با جایگذاری $x = 4$ در $\log_2^x$ به $\log_2^{2^2}$ می رسیم که برابر عدد ۲ می باشد .

****

۲ -گزینه ۴

برای آنکه نقطه تلاقی دو منحنی را پیدا کنیم باید معادله آن دو منحنی را با هم برابر قرار دهیم .

$$2^x = (\sqrt{2})^{x+1} + 4 \rightarrow (\sqrt{2})^{2x} = (\sqrt{2})^x(\sqrt{2}) + 4 \xrightarrow{\sqrt{2}^x = t} t^2 - \sqrt{2}\,t - 4 = 0 \rightarrow \Delta = (-\sqrt{2})^2 - 4(1)(-4) = 18$$

$$t = \frac{-(-\sqrt{2}) \pm \sqrt{18}}{2} \rightarrow t = \frac{\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = 2\sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \end{cases}$$

می دانیم $(\sqrt{2})^x$ به ازای هر مقدار x مثبت می باشد پس $t = 2\sqrt{2}$ قابل قبول است .

$$2\sqrt{2} = \sqrt{2}^x \rightarrow 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{x}{2}} \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

اکنون باید $x = 3$ را در یکی از معادلات داده شده قرار دهیم تا عرض نقطه تلاقی را پیدا کنیم :

$$y = 2^x \xrightarrow{x=3} y = 2^3 \Rightarrow \boxed{B(3,8)}$$

حال به کمک رابطه $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ فاصله این دو نقطه را پیدا می کنیم :

$$AB = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

****

۳-گزینه ۲

به سراغ فرض مسئله رفته و به کمک ویژگی های لگاریتم ها مقدار x را محاسبه می کنیم :

$$\log_{x}^{(۳x+۸)}+\log_{x}^{(x-۶)}=۲ \rightarrow \log_{x}^{(۳x+۸)(x-۶)}=۲$$

$$x^{۲}=(۳x+۸)(x-۶) \rightarrow x^{۲}-۵x-۲۴=۰ \rightarrow \begin{cases} x=۸ \\ x=-۳ \end{cases}$$

$x=-۳$ عبارات مقابل لگاریتم ها را منفی می کند بنابراین $x=۸$ قابل قبول است .

با جایگذاری مقدار بدست آمده برای x در $\log_{۴}^{x}$ به $\log_{۲^{۲}}^{۲^{۳}}$ می رسیم که برابر $\frac{۳}{۲}$ می باشد .

****

۴-گزینه ۴

پایه های لگاریتمها یکسان هستند بنابراین تفاضل دو لگاریتم را به تقسیم در یک لگاریتم تبدیل می کنیم :

$$\log_{۳}^{(۲x^{۲}+۱)}-\log_{۳}^{(x+۲)}=۱ \rightarrow \log_{۳}^{\frac{۲x^{۲}+۱}{x+۲}}=۱ \rightarrow \frac{۲x^{۲}+۱}{x+۲}=۳$$

$$۲x^{۲}+۱=۳x+۶ \rightarrow ۲x^{۲}-۳x-۵=۰ \rightarrow \boxed{x=-۱\ ,\ x=\frac{۵}{۲}}$$

از دو ریشه ی به دست آمده هر دو ریشه قابل قبول هستند و در دامنهی معادله صدق می کنند . خواسته ی مسئله $\log_{۸}^{۲x-۱}$ است که از دو مقدار به دست آمده فقط می توانیم $x=\frac{۵}{۲}$ را در این رابطه قرار دهیم که خواهیم داشت :

$$\log_{۸}^{۲x-۱} \xrightarrow{x=\frac{۵}{۲}} \log_{۸}^{۲(\frac{۵}{۲})-۱}=\log_{۸}^{۴}=\log_{۲^{۳}}^{۲^{۲}}=\frac{۲}{۳}\log_{۲}^{۲}=\boxed{\frac{۲}{۳}}$$

۵ - گزینه ۲

در سمت چپ معادله ی داده شده ، پایه های لگاریتمها یکسان هستند بنابراین تفاضل دو لگاریتم را به تقسیم در یک لگاریتم تبدیل می کنیم :

$$\log(x^{۲}-x-۶)-\log(x-۳)=\log(۲x-۵) \rightarrow \log\frac{x^{۲}-x-۶}{x-۳}=\log(۲x-۵)$$

$$\frac{x^{۲}-x-۶}{x-۳}=۲x-۵ \rightarrow x^{۲}-x-۶=(x-۳)(۲x-۵) \rightarrow x^{۲}-x-۶=۲x^{۲}-۱۱x+۱۵$$

$$x^{۲}-۱۰x+۲۱=۰ \rightarrow (x-۳)(x-۷)=۰ \rightarrow \boxed{x=۳\ ,x=۷}$$

از دو ریشه ی به دست آمده $x=3$ در دامنه ی معادله قرار ندارد بنابراین تنها ریشه ی معادله $x=7$ است که باید در حکم قرار داده شود :

$$\log_4 \sqrt[3]{x+1} \xrightarrow{x=7} \log_4 \sqrt[3]{7+1} = \log_4 2 = \log_{2^2} 2 = \frac{1}{2}\log_2 2 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

۶ -گزینه ۳

برای حل دستگاه باید در معادله اولی پایه ها را یکسان کنیم و معادله لگاریتمی را از حالت لگاریتمی خارج کنیم :

$$1)\ 2^{x-7} \times 2^{2x+2y} = 2^0 \longrightarrow 2^{3x+2y-7} = 2^0 \to 3x+2y-7=0 \to \boxed{3x+2y=7}$$

$$2)\ \log y = \log 3^2 + \log x \to \boxed{y=9x} \to \boxed{x=\frac{y}{9}} \xrightarrow{3x+2y=7} 3(\frac{y}{9})+2y=7 \to$$

$$\frac{y}{3}+2y=7 \xrightarrow{\times 3} y+6y=21 \to \boxed{y=3}$$

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

۷ -گزینه ۴

برای حل دستگاه باید در معادله اولی پایه ها را یکسان کنیم و معادله لگاریتمی را از حالت لگاریتمی خارج کنیم :

$$1)\ 3^{2x+y} = 3^2 \times 3^{x-y} \longrightarrow 3^{2x+y} = 3^{x-y+2} \to 2x+y = x-y+2 \to \boxed{x+2y=2}$$

$$2)\ \log(x+2y) - \log y = 1 \to \log(\frac{x+2y}{y}) = 1 \xrightarrow{x+2y=2} \log(\frac{2}{y}) = 1 \to \frac{2}{y} = 10 \to \boxed{y=\frac{1}{5}}$$

$$x+2y=2 \xrightarrow{y=\frac{1}{5}} x+\frac{2}{5}=2 \xrightarrow{\frac{2}{5}=0/4} x=2-0/4 \ \boxed{x=1/6}$$

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

۸ -گزینه ۴

اگر به گزینه ها کمی دقت کنیم ، می بینیم که با انجام عملیات های ساده در مورد لگاریتمها و به کار بردن قوانین ساده لگاریتمی ، تمامیه گزینه ها به نوعی مرتبط با تابع داده شده در صورت سوال هستند . هدف اصلیه طراح در این تست ، این بوده است که قوانین لگاریتم ها را برای اعداد معلوم می توانیم به کار ببریم نه عبارت های مجهول مثلا می دانیم برای تابع $f(x)=\log x^2$ ، طبق قوانین تابع ، می توانیم توان را به پشت لگاریتم منتقل کنیم و به تابع $f(x)=2\log x$ برسیم اما این دو تابع با هم برابر نیستند زیرا موضوع بسیار مهمی به نام دامنه تابع مطرح می

شود . در تابع اول تمامی اعداد مثبت و منفی را می توانیم در تابع قرار دهیم در حالیکه در تابع دوم فقط اعداد مثبت در تابع قرار می گیرند . در این تست هم ابتدا باید دامنه ی تابع داده شده در صورت صوال را تعیین کنیم و سپس به سراغ دامنه ی سایر گزینه ها برویم :

$$y=\log\frac{x-۲}{x} \rightarrow D:\frac{x-۲}{x}>۰ \rightarrow \boxed{+}\ \ ۰\ \ \boxed{-}\ \ ۲\ \ \boxed{+} \quad \rightarrow D=(-\infty,۰)\cup(۲,+\infty)$$

منطقه ی آبی رنگ دامنه تابع است . حال به سراغ تعیین دامنه ی گزینه ها می رویم :

گزینه اول :

$$y=\log(x-۲)-\log x \rightarrow D:(x-۲>۰\rightarrow x>۱)\ ,\ (x>۰) \xrightarrow{x>۲\ \cap\ x>۰} \boxed{x>۲}$$

ملاحظه می شود با وجود اینکه در ظاهر می توانیم تابع داده شد در صورت سوال را به گزینه ی اول تبدیل کنیم اما به خاطر برابر نبودن دو دامنه ، این دو تابع با هم برابر نیستند .

گزینه دوم :

$$y=\log\frac{x^۲-۴}{x^۲+۲x} \rightarrow D:\frac{x^۲-۴}{x^۲+۲x}>۰ \rightarrow \boxed{+}\ \ -۲\ \ \boxed{+}\ \ ۰\ \ \boxed{-}\ \ ۲\ \ \boxed{+}$$

$$\rightarrow D=(-\infty,-۲)\cup(-۲,۰)\cup(۲,+\infty)$$

منطقه ی آبی رنگ دامنه تابع است که با دامنه تابع اصلی متفاوت است . اشتباهی که برخی دانش آموزان ممکن است در این گزینه انجام دهند این است که در عبارت $\frac{x^۲-۴}{x^۲+۲x}$ ، به کمک اتحاد و تجزیه ، کسر را به صورت $\frac{x^۲-۴}{x^۲+۲x}=\frac{(x-۲)\cancel{(x+۲)}}{x\cancel{(x+۲)}}=\frac{x-۲}{x}$ تبدیل کنند و تصور کنند که این تابع با تابع داده شده در صورت سوال برابر است . درحالیکه ساده کردن عبارت $x+۲$ از صورت و مخرج ، دامنه را تغییر می دهد .

ملاحظه می شود با وجود اینکه در ظاهر می توانیم تابع داده شد در صورت سوال را به گزینه ی اول تبدیل کنیم اما به خاطر برابر نبودن دو دامنه ، این دو تابع با هم برابر نیستند .

گزینه سوم :

$$y=\frac{۱}{۲}\log(\frac{x-۲}{x})^۲ \rightarrow D:(\frac{x-۲}{x})^۲>۰ \rightarrow D:R-\{۰\}$$

با کسری مواجه هستیم که توانِ ۲ دارد به ازای هر مقداری مثبت خواهد شد ، فقط ریشه ی مخرج را که عدد صفر است باید از مجموعه اعداد حقیقی برداریم .

ملاحظه می شود با وجود اینکه در ظاهر می تـوانیم تـابع داده شـد در صـورت سـوال را بـه گزینـه ی اول تبـدیل کنـیم امـا به خاطر برابر نبودن دو دامنه ، این دو تابع با هم برابر نیستند .

گزینه سوم :

$$y=۲\log\sqrt{\frac{x-۲}{x}}\rightarrow D:\frac{x-۲}{x}>۰\rightarrow \boxed{+}\quad ۰\quad \boxed{-}\quad ۲\quad \boxed{+}\qquad \rightarrow D=(-\infty,۰)\cup(۲,+\infty)$$

ملاحظه می شود با وجود اینکه در ظـاهر مـی تـوانیم تـابع داده شـد در صـورت سـوال را بـه گزینـه ی اول تبـدیل کنـیم (عدد ۲ پشت لگـاریتم را بـه عنـوان تـوان رادیکـال در نظـر بگیـریم و تـوان و رادیکـال بـا هـم سـاده شـوند) ، دامنـه ی دوتابع نیز برابر هستند و لذا این گزینه پاسخ صحیح این تست است .

❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊

۹ –گزینه ۱

برای حل این نوع معادلات نمایی ابتدا باید پایـه هـا را یکسـان کـرده و آنهـا را سـاده کنـیم و تـوان هـا را بـاهم برابـر قـرار دهیم :

$$(۰/۴)^{۲x-۱}=(\frac{۱۲۵}{۸})^{x^۲}\rightarrow(\frac{۴}{۱۰})^{۲x-۱}=((\frac{۵}{۲})^۳)^{x^۲}\rightarrow(\frac{۲}{۵})^{۲x-۱}=((\frac{۲}{۵})^{-۳})^{x^۲}$$

$$\rightarrow\cancel{(\frac{۲}{۵})}^{۲x-۱}=\cancel{(\frac{۲}{۵})}^{-۳x^۲}\rightarrow ۲x-۱=-۳x^۲\rightarrow ۳x^۲+۲x-۱=۰\rightarrow\begin{cases}x=-۱\\ x=\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

هر دو ریشه ی به دست آمـده قابـل قبـول هسـتند (آنهـا را امتحـان کنیـد) . امـا خواسـته ی سـوال محاسـبه ی عبـارت $\log_۸(۹x+۱)$ است که بـه ازای ۱- ، عبـارت جلـوی لگـاریتم تعریـف نشـده مـی شـود . بنـابراین بایـد عـدد $\frac{۱}{۳}$ را قـرار دهیم که به عدد $\log_۸ ۴=\log_{۲^۳} ۲^۲=\frac{۲}{۳}\log_۲ ۲=\boxed{\frac{۲}{۳}}$ می رسیم .

❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊

۱۰ –گزینه ۲

با توجه به نمودار داده شده معلوم است که مجانـب قـائم تـابع ، خـط $x=-۱$ اسـت و مـی دانـیم عـدد مربـوط بـه مجانـب قائم ، عبارت جلوی لگاریتم را صفر می کنـد . بنـابراین گزینـه هـای اول و دوم انتخـاب مـی شـوند . تفـاوت ایـن دو گزینـه

در این است که در گزینه اول با تابع $\log(x+۱)$ مواجه هستیم که به خاطر مثبت بودن ضریب x صعودی است و در گزینه دوم با تابع $-\log(x+۱)$ روبرو هستیم که به خاطر وجود منفی در پشت لگاریتم ، نزولی است . بنابراین پاسخ صحیح این تست گزینه ی ۲ است .

تمرین : نمودار هر ۴ گزینه را رسم کنید

❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊

۱۱ –گزینه ۳

برای حل این نوع معادلات نمایی ابتدا باید پایه ها را یکسان کرده و آنها را ساده کنیم و توان ها را باهم برابر قرار دهیم :

$$۳^{x^۲-۲}=۸۱^x \rightarrow ۳^{x^۲-۲}=(۳)^{۴x} \rightarrow x^۲-۲=۴x \rightarrow x^۲-۴x-۲=۰$$

$$\Delta=۱۶-۴(۱)(-۲)=۲۴ \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{۴+\sqrt{۲۴}}{۲}=\dfrac{۴+۲\sqrt{۶}}{۲}=\boxed{۲+\sqrt{۶}} \\ x=\dfrac{۴-\sqrt{۲۴}}{۲}=\dfrac{۴-۲\sqrt{۶}}{۲}=\boxed{۲-\sqrt{۶}} \end{cases}$$

هر دو ریشه ی به دست آمده قابل قبول هستند (آنها را امتحان کنید) . اما خواسته ی سوال محاسبه ی عبارت $\log_۶(x-۲)$ است که به ازای $۲-\sqrt{۶}$ ، عبارت جلوی لگاریتم تعریف نشده می شود . بنابراین باید عدد $۲+\sqrt{۶}$ را قرار دهیم که به عدد $\log_۶(۲+\sqrt{۶}-۲)=\log_۶\sqrt{۶}=\boxed{\dfrac{۱}{۲}}$ می رسیم .

❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊

۱۲ –گزینه ۱

با توجه به نمودار داده شده معلوم است که مجانب قائم تابع ، خط $x=\frac{۱}{۲}$ است و می دانیم عدد مربوط به مجانب قائم ، عبارت جلوی لگاریتم را صفر می کند . بنابراین عبارت $۲x+a$ به ازای $x=\frac{۱}{۲}$ صفر خواهد شد . پس $\boxed{a=-۱}$ به دست می آید. برای محاسبه b هم از نقطه کمکی که در نمودار تابع داده شده است (نقطه ی (۰ و ۲))

کمک می گیریم :

$$y=-۱+\log_b(۲x+a)\xrightarrow[a=-۱]{x=۲\,,\,y=۰}۰=-۱+\log_b(۴-۱)\to\log_b ۳=۱\to\boxed{b=۳}$$

با بـه دســت آمـدن مقـادیر $a\,,b$ ، تـابع بـه صـورت $y=-۱+\log_۳(۲x-۱)$ بازنویسـی مـی شـود و بـرای یـافتن محل برخورد تابع با خط $y=۱$ ، کفیسـت تـابع را برابـر بـا عـدد ۱ قـرار داده و معادلـه ی سـاده ی لگـاریتمی ه بـه دسـت آمده را حل کنیم :

$$-۱+\log_۳(۲x-۱)=۱\to\log_۳(۲x-۱)=۲\to ۲x-۱=۳^۲\to ۲x-۱=۹\to ۲x=۸\to\boxed{x=۴}$$

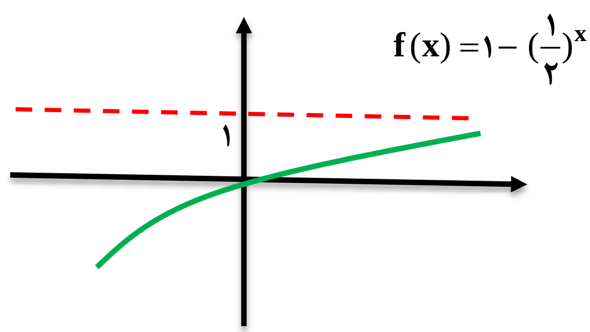
****

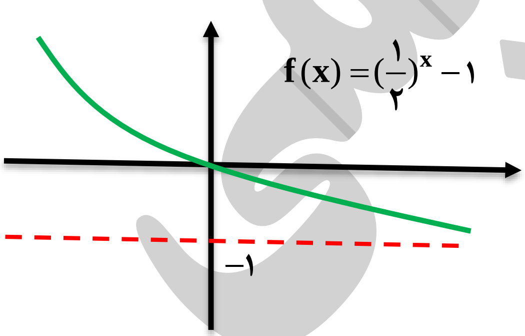
تستهای کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور گروه <u>ریاضی</u> در سالهای ۹۳ تا ۹۸ مربوط به مبحث " لگاریتم "

۱۳ –گزینه ۳

با تیپ سوالاتی که مربوط به تعیین دامنه ی توابعی بـه فـرم $\sqrt{xf(x)}$ هســتند در فصـل تـابع آشـنا شـده ایـم و مـی دانـیم برای حل اینگونه تستها باید نمـودار تـابع را در اختیـار داشـته باشـیم و پس از بزرگتـر- مسـاوی صـفر قـرار دادن عبـارت زیر رادیکـال نـواحی مـورد نظـر از نمـودار مربوطـه را انتخـاب کـنـیم و x هـای آن نـواحی را بـه عنـوان دامنـه در نظـر بگیریم که در این مثال بـا انتخـاب نـواحی اول و سـوم از نمـودار تـابع داده شـده مـی تـوانیم دامنـه تـابع را تعیـین کنـیم زیرا عبارت $xf(x)$ باید مثبت شود و در نواحی اول و سوم ضرب طول و عرض مثبت خواهد شد :

برای رسم نمودار تابع $f(x)=۱-(\frac{۱}{۲})^x$ به خاطر وجـود منفـی در پشـت عبـارت نمـایی ، ابتـدا از منفـی فـاکتور مـی گیـریم ، نمودار مورد نظر را رسم می کنیم و در نهایت نمودار رسم شده را نسبت به محور طولها دوران می دهیم :





ملاحظه می شود نمودار تابع سمت راسـت بـه ازای تمـام x هـا از نـواحی اول و سـوم عبـور کـرده اسـت و دامنـه تـابع کـلِ مجموعه ی اعداد حقیقی می باشد که گزینه ی سوم این تست می باشد .

****

۱۴ –گزینه ۴

عبارت زیر رادیکال شبیه به نمونه های تیپ و معروف نمی باشد(همانند نمونه هایی مثل $\sqrt{xf(x)}$ یا $\sqrt{-xf(x)}$ یا $\sqrt{\frac{x}{f(x)}}$ و ۰۰۰۰۰) بنابراین بهتر است عبارت زیر رادیکال را تشکیل داده و آنرا بزرگتر- مساوی صفر قرار دهیم :

$$y=\sqrt{f(\frac{1}{x})-f(x)}=y=\sqrt{2^{\frac{1}{x}}-2^{x}}\rightarrow 2^{\frac{1}{x}}-2^{x}\geq 0\rightarrow 2^{\frac{1}{x}}\geq 2^{x}\rightarrow$$

$$\frac{1}{x}\geq x\rightarrow \frac{1}{x}-x\geq 0\rightarrow \frac{1-x^2}{x}\geq 0\rightarrow \boxed{+}\ -1\ \boxed{-}\ 0\ \boxed{+}\ 1\ \boxed{-}\rightarrow \boxed{D:(-\infty\ ,\ -1]\cup(0\ ,\ 1]}$$

****

۱۵ –گزینه ۱

در تابع داده شده دو مجهول مشاهده می شود بنابراین باید دو کلید هم برای یافتن این دو مجهول پیدا کنیم

عبارت $x\in(-\frac{1}{2},+\infty)$ به معنای دامنه تابع است و با کمی دقت معلوم می شود که عدد $-\frac{1}{2}$ مجانب قائم تابع است و به عبارت دیگر ، عبارت مقابل لگاریتم را صفر می کند . بنابراین اولین کلید به دست می آید :

$$ax+b\xrightarrow{x=-\frac{1}{2}}-\frac{a}{2}+b=0\rightarrow \boxed{a=2b}$$

برای دومین کلید هم به سراغ فرض دوم مسئله یعنی $f(4)=2$ می رویم :

$$f(x)=\log_{3}(ax+b)\xrightarrow{f(4)=2}2=\log_{3}(4a+b)\rightarrow \boxed{4a+b=9}$$

با حل دستگاه شامل دو معادله و دو مجهول مقادیر b , a به صورت $b=1\ ,\ a=2$ به دست می آیند و با جایگذاری آنها در تابع ، خواسته ی سوال یعنی $f(-\frac{4}{9})$ را به دست می آوریم :

$$f(x)=\log_{3}(2x+1)\xrightarrow{x=-\frac{4}{9}}\log_{3}(2(-\frac{4}{9})+1)=\log_{3}\frac{1}{9}=\boxed{-2}$$

****

۱۶ –گزینه ۱

در تابع داده شده دو مجهول مشاهده می شود بنابراین باید دو کلید هم برای یافتن این دو مجهول پیدا کنیم

این دو کلید به صورت دو نقطه با مختصات کامل است که در صورت سوال وبا کمی دقت متوجه این دو کلید خواهیم شد که این دو نقطه ی داده شده به صورت $(1, -1)\ ,\ (-1, 0)$ می باشد و با جایگذاری آنها در تابع ، دستگاه ایجاد شده را حل می کنیم :

$$y=\log_{\frac{1}{2}}(ax+b)\rightarrow\begin{cases}(1,-1)\ \rightarrow -1=\log_{\frac{1}{2}}(a+b)\ \rightarrow\ a+b=(\frac{1}{2})^{-1}\ \rightarrow\ \boxed{a+b=2}\\(-1,0)\ \rightarrow 0=\log_{\frac{1}{2}}(-a+b)\rightarrow\ -a+b=(\frac{1}{2})^{0}\ \rightarrow\ \boxed{-a+b=1}\end{cases}$$

با حل دستگاه شامل دو معادله و دو مجهول مقادیر a , b به صورت $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$ به دست می آیند .

****

۱۷ –گزینه ۳

در تابع داده شده دو مجهول مشاهده می شود بنابراین باید دو کلید هم برای یافتن این دو مجهول پیدا کنیم

این دو کلید به صورت دو نقطه با مختصات کامل است که در صورت سوال این دو نقطه ی داده شده به صورت $(2, 6)\ ,\ (12, 10)$ می باشند و با جایگذاری آنها در تابع ، دستگاه ایجاد شده را حل می کنیم :

$$y=a+\log_2(bx-4)\rightarrow\begin{cases}(12,10)\ \rightarrow 10=a+\log_2(12b-4)\ \rightarrow\ \boxed{a=10-\log_2(12b-4)}\\(2,6)\ \rightarrow 6=a+\log_2(2b-4)\end{cases}$$

با جایگذاری عبارت به دست آمده از معادله ی بالا در معادله ی پائین ، معادله بر حسب b به صورت تک مجهولی نوشته می شود :

$$6=a+\log_2(2b-4)\xrightarrow{a=10-\log_2(12b-4)}6=10-\log_2(12b-4)+\log_2(2b-4)$$

$$-4=\log_2\frac{2b-4}{12b-4}\ \rightarrow\ \frac{2b-4}{12b-4}=2^{-4}=\frac{1}{16}\ \rightarrow\ 32b-64=12b-4\rightarrow 20b=60\ \rightarrow\ \boxed{b=3}$$

با جایگذاری مقدار به دست آمده برای b و جایگذاری آن در رابطه ی $a=10-\log_2(12b-4)$ ، مقدار a هم به

ترتیب زیر به دست می آید :

$$a=10-\log_2(12b-4)\xrightarrow{\boxed{b=3}}a=10-\log_2(36-4)=10-\log_2 32=10-5=\boxed{5}$$

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

۱۸ –گزینه ۳

برای یافتن محل برخورد دو تابع باید معادله حاصل از تلاقی ضابطه های دو تابع را حل کنیم :

$$(\frac{\sqrt{3}}{3})^{2x}=3^x+\frac{8}{3}\to(\frac{3}{9})^x=3^x+\frac{8}{3}\to(\frac{1}{3})^x=3^x+\frac{8}{3}\to 3^{-x}=3^x+\frac{8}{3}\xrightarrow{3^x=t}$$

$$\frac{1}{t}=t+\frac{8}{3}\xrightarrow{\times 3t}3=3t^2+8t\to 3t^2+8t-3=0\to\Delta=64-4(3)(-3)=100$$

$$t_{1,2}=\frac{-8\pm10}{6}\to\begin{cases}t_1=-2\to 3^x=t\to 3^x=-2\ \times\\ t_2=\frac{1}{3}\to 3^x=t\to 3^x=\frac{1}{3}\to\boxed{x=-1}\end{cases}$$

مقدار به دست آمده برای x را در هر یک از نمودارهای داده شده به صورت دلخواه قرار می دهیم تا عرض تلاقی هم به دست بیاید . سپس فاصله ی نقطه ی به دست آمده را از نقطه ی $(1\ ,\ -1)$ تعیین می کنیم

$$y=3^x+\frac{8}{3}\xrightarrow{x=-1}y=3^{-1}+\frac{8}{3}\to y=\frac{1}{3}+\frac{8}{3}=3\to(-1\ ,3)\to D=\sqrt{(-1+1)^2+(3-1)^2}=\boxed{2}$$

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

۱۹ –گزینه ۳

در تابع داده شده دو مجهول مشاهده می شود بنابراین باید دو کلید هم برای یافتن این دو مجهول پیدا کنیم

این دو کلید به صورت دو نقطه با مختصات کامل است که در صورت سوال این دو نقطه ی داده شده به صورت $(5,11),(21,15)$ می باشند و با جایگذاری آنها در تابع ، دستگاه ایجاد شده را حل می کنیم :

$$f(x)=a+\log_2(3x+b)^2\to\begin{cases}(5\ ,\ 11)\to 11=a+\log_2(15+b)^2\to\boxed{a=11-\log_2(15+b)^2}\\(21\ ,\ 15)\to 15=a+\log_2(63+b)^2\end{cases}$$

با جایگذاری عبارت به دست آمده از معادله ی بالا در معادله ی پائین ، معادله بر حسب b به صورت تک مجهولی نوشته می شود :

$$۱۵ = a + \log_{۲}(۶۳ + b)^{۲} \xrightarrow{a=۱۱-\log_{۲}(۱۵+b)^{۲}} ۱۵ = ۱۱ - \log_{۲}(۱۵ + b)^{۲} + \log_{۲}(۶۳ + b)^{۲}$$

$$۴ = \log_{۲}\left(\frac{۶۳+b}{۱۵+b}\right)^{۲} \rightarrow \cancel{۴} = \cancel{۲}\log_{۲}\left(\frac{۶۳+b}{۱۵+b}\right) \rightarrow ۲ = \log_{۲}\left(\frac{۶۳+b}{۱۵+b}\right) \rightarrow$$

$$\frac{۶۳+b}{۱۵+b} = ۴ \rightarrow ۶۰ + ۴b = ۶۳ + b \rightarrow ۳b = ۳ \rightarrow \boxed{b = ۱}$$

با جایگذاری مقدار به دست آمده برای b و جایگذاری آن در رابطه ی $a = ۱۱ - \log_{۲}(۱۵ + b)^{۲}$ ، مقدار a هم به ترتیب زیر به دست می آید :

$$a = ۱۱ - \log_{۲}(۱۵ + b)^{۲} \xrightarrow{\boxed{b=۱}} a = ۱۱ - \log_{۲}(۱۵ + ۱)^{۲} = ۱۱ - \log_{۲} ۱۶^{۲} = ۱۱ - ۲\log_{۲} ۱۶ = ۱۱ - ۸ = \boxed{۳}$$

****

۲۰ –گزینه ۲

یکی از توابع داده شده در صورت سوال اصلاح شود $g(x) = (\frac{۱}{۲})^{۲x} + \frac{۳}{۲}$

برای یافتن محل برخورد دو تابع باید معادله حاصل از تلاقی ضابطه های دو تابع را حل کنیم :

$$(۴)^{x} = (\frac{۱}{۲})^{۲x} + \frac{۳}{۲} \rightarrow (۴)^{x} = ۴^{-x} + \frac{۳}{۲} \xrightarrow{۴^{x}=t}$$

$$t = \frac{۱}{t} + \frac{۳}{۲} \xrightarrow{\times ۲t} ۲t^{۲} = ۲ + ۳t \rightarrow ۲t^{۲} - ۳t - ۲ = ۰ \rightarrow \Delta = ۹ - ۴(۲)(۲) = ۲۵$$

$$t_{۱,۲} = \frac{۳ \pm ۵}{۴} \rightarrow \begin{cases} t_{۱} = ۲ \rightarrow ۴^{x} = t \rightarrow ۴^{x} = ۲ \rightarrow \boxed{x = \frac{۱}{۲}} \\ t_{۲} = -\frac{۱}{۲} \rightarrow ۴^{x} = t \rightarrow ۴^{x} = -\frac{۱}{۲} \rightarrow \times \end{cases}$$

مقدار به دست آمده برای x را در هر یک از نمودارهای داده شده به صورت دلخواه قرار می دهیم تا عرض تلاقی هم به دست بیاید . سپس فاصله ی نقطه ی به دست آمده را از نقطه ی $(۱ \ , \ -۱)$ تعیین می کنیم

$$y = ۴^{x} \xrightarrow{x=\frac{۱}{۲}} y = ۴^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۴} = ۲ \rightarrow (\frac{۱}{۲}, ۲) \rightarrow D = \sqrt{(\frac{۱}{۲} - (-\frac{۱}{۲}))^{۲} + (۲ - ۱)^{۲}} = \sqrt{۱^{۲} + ۱^{۲}} = \boxed{\sqrt{۲}}$$

❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊

۲۱ –گزینه ۳

در این سوال باید رابطه ی مربوط به میزان بـادِ باقیمانـده را تعیـین کنـیم . از آنجاییکـه روزانـه ۵ درصـد بـاد قـایق تخلیـه می شود بنابراین میزان باد بـاقی مانـده ۹۵ درصـد خواهـد بـود و رابطـه ی مربوطـه بـه صـورت $A = A_0(\frac{95}{100})^t$ خواهـد بود . حـال بایـد زمـان میـزان بـادی را را بیـابیم کـه مقـدار بـاد بـاقی مانـده نصـف بـاد اولیـه شـود بـه عبـارت دیگـر $A = \frac{1}{2}A_0$ شود که با جایگذاری در معادله ی اصـلی بـه یـک معادلـه نمـایی بـه صـورت زیـر مـی رسـیم کـه مـی تـوانیم مجهول زمان را از آن پیدا کنیم :

$$A = A_0(\frac{95}{100})^t = A_0(\frac{19}{20})^t \xrightarrow{A=\frac{1}{2}A_0} \frac{1}{2}\cancel{A_0} = \cancel{A_0}(\frac{19}{20})^t \rightarrow \frac{1}{2}=(\frac{19}{20})^t$$

$$\xrightarrow{\log} \log\frac{1}{2}=\log(\frac{19}{20})^t \rightarrow \underbrace{\underbrace{\log 1}_{0}-\underbrace{\log 2}_{0/301}}_{-0/301}=t(\underbrace{\underbrace{\log 19}_{1/287}-\underbrace{\log 20}_{\underbrace{\log 2+\log 10}_{0/301\,+\,1=1/301}}}_{-0/014})$$

$$t=\frac{-0/301}{-0/014}=\frac{301}{14}=\boxed{21/5}$$

❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊

۲۲ –گزینه ۴

ابتدا به سراغ فرض مسئله می رویم و به کمک ویژگی های لگاریتم آن را ساده کرده و x را پیدا می کنیم :

$$\log(x+2)+\log(2x-1)=\log(4x+1) \rightarrow \log(x+2)(2x-1)=\log(4x+1)$$

$$(x+2)(2x-1)=4x+1 \rightarrow 2x^2+3x-2=4x+1 \rightarrow 2x^2-x-3=0 \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$$

از مقادیر فوق $x=\frac{3}{2}$ قابل قبول است . زیرا جلوی تمام لگاریتم ها باید بزرگتر از صفر باشد .

اکنون با جایگذاری $x=\frac{3}{2}$ در $\log_4^{2x+5}$ به $\log_4^{8}$ می رسیم که برابر با ۱/۵ خواهد شد .

****

۲۳ -گزینه ۴

در تابع داده شده دو مجهول مشاهده می شود بنابراین باید دو کلید هم برای یافتن این دو مجهول پیدا کنیم

این دو کلید به صورت نقطه ی تلاقی تابع مجهول دار با تابع $y = x^2 - x$ ایجاد می شود . کافیست طولهای تلاقی دو تابع که نقاط ۱ و ۲ هستند را در تابع $y = x^2 - x$ قرار دهیم تا عرض های برخورد دو تابع نیز تعیین شود . سپس دو نقطه با مختصات کامل را در تابع مجهول دار قرار دهیم و با حل دستگاه ، مجهولات را بیابیم :

$$y = x^2 - x \rightarrow \begin{cases} x = 1 \rightarrow y = 0 \rightarrow (1,0) \\ x = 2 \rightarrow y = 2 \rightarrow (2,2) \end{cases}$$

$$f(x) = -2 + (\frac{1}{2})^{Ax+B} \rightarrow \begin{cases} (1,0) \rightarrow 0 = -2 + (\frac{1}{2})^{A+B} \rightarrow 2 = 2^{-A-B} \rightarrow \boxed{-A-B=1} \\ (2,2) \rightarrow 2 = -2 + (\frac{1}{2})^{2A+B} \rightarrow 2^2 = 2^{-2A-B} \rightarrow \boxed{-2A-B=2} \end{cases}$$

از حل دستگاه به وجود آمده مقادیر A , B به ترتیب به صورت $A = -1$, $B = 0$ به دست می آیند و تابع $f(x)$ به صورت $f(x) = -2 + (\frac{1}{2})^{-x}$ به دست می آید و خواسته سوال که $f(3) = -2 + (\frac{1}{2})^{-3} = -2 + 2^3 = \boxed{6}$ خواهد شد .

****

۲۴ -گزینه ۳

در تابع داده شده دو مجهول مشاهده می شود بنابراین باید دو کلید هم برای یافتن این دو مجهول پیدا کنیم

این دو کلید به صورت نقطه ی تلاقی تابع مجهول دار با تابع $y = x^2$ ایجاد می شود . کافیست طولهای تلاقی دو تابع که نقاط ۱ و ۳ هستند را در تابع $y = x^2$ قرار دهیم تا عرض های برخورد دو تابع نیز تعیین شود . سپس دو نقطه با مختصات کامل را در تابع مجهول دار قرار دهیم و با حل دستگاه ، مجهولات را بیابیم :

$$y = x^2 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \rightarrow y = 1 \rightarrow (1,1) \\ x = 3 \rightarrow y = 9 \rightarrow (3,9) \end{cases}$$

$$f(x) = 3^{Ax+B} \rightarrow \begin{cases} (1,1) \rightarrow 1 = 3^{A+B} \rightarrow 3^0 = 3^{A+B} \rightarrow \boxed{A+B=0} \\ (3,9) \rightarrow 9 = 3^{3A+B} \rightarrow 3^2 = 3^{3A+B} \rightarrow \boxed{3A+B=2} \end{cases}$$

از حل دستگاه به وجود آمده مقادیر A , B به ترتیب به صورت $A = 1$, $B = -1$ به دست می آیند و تابع $f(x)$ به صورت $f(x) = 3^{x-1}$ به دست می آید و خواسته سوال که محل برخورد تابع با محور عرض ها می باشد $f(0) = 3^{-1} = \boxed{\frac{1}{3}}$ خواهد شد .