تستهای کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور گروه تجربی در سالهای ۹۳ تا ۹۸ مربوط به مبحث پیوستگی

سراسری تجربی ۹۳

۱ -گزینه ۱

کافیست مرز دو ضابطه را که نقطه $\frac{\pi}{۴}$ است ، در هر دو ضابطه قرار دهیم (حد تابع را در هر دو ضابطه در مرز تعیین کنیم):

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۱-\tan^۲ x}{\cos ۲x} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{hop} \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{-۲\tan x(۱+\tan^۲ x)}{-۲\sin ۲x} = \frac{-۴}{-۲} = \boxed{۲} \quad , \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} a\cos ۳x = a\cos ۳\frac{\pi}{۴} = \boxed{-a\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$

$$-a\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۲ \to a = -\frac{۴}{\sqrt{۲}} = \boxed{-۲\sqrt{۲}}$$

با استفاده از اتحاد $\cos ۲x = \frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}$ هم می توانستیم این حد را رفع ابهام کنیم . (امتحان کنید)

سراسری تجربی خارج کشور ۹۳

۲ -گزینه ۲

کافیست مرز دو ضابطه را که نقطه π است ، در هر دو ضابطه قرار دهیم(حد تابع را در هر دو ضابطه در مرز تعیین کنیم):

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{\sqrt{۱+\cos x}}{x-\pi} = \frac{۰}{۰} \to \lim_{x\to\pi^+} \frac{\sqrt{۲\cos^۲ \frac{x}{۲}}}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{\sqrt{۲}\,|\cos\frac{x}{۲}|}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{-\sqrt{۲}\cos\frac{x}{۲}}{x-\pi} \xrightarrow{hop} \lim_{x\to\pi} \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin\frac{x}{۲}}{۱} = \boxed{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$

$$\lim_{x\to\pi^-} a\cos\frac{۲x}{۳} = a\cos\frac{۲\pi}{۳} = \boxed{-\frac{a}{۲}} \quad \to \quad \frac{\sqrt{۲}}{۲} = -\frac{a}{۲} \to \boxed{a = -\sqrt{۲}}$$

سراسری تجربی ۹۴

۳ -گزینه ۲

کافیست مرز دو ضابطه را که نقطه ۶ است ، در هر دو ضابطه قرار دهیم(حد تابع را در هر دو ضابطه در مرز تعیین کنیم):

$$\lim_{x\to۶} \sin\frac{\pi}{x} = \sin\frac{\pi}{۶} = \boxed{\frac{۱}{۲}} \quad , \quad \lim_{x\to۶} a+\cos^۲\frac{\pi x}{۳۶} = a+\cos^۲\frac{۶\pi}{۳۶} = \boxed{a+\frac{۳}{۴}}$$

$$a+\frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۲} \to \boxed{a = -\frac{۱}{۴}}$$

سراسری تجربی خارج کشور ۹۴

۴ -گزینه ۴

کافیست مرز دو ضابطه را که نقطه $\frac{\pi}{۲}$ است ، در هر دو ضابطه قرار دهیم(حد تابع را در هر دو ضابطه در مرز تعیین کنیم):

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{\cos ۳x}{\cos x} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{hop} \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{-۳\sin ۳x}{\sin x} = \frac{۳}{-۱} = \boxed{-۳} \quad , \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \sin ۵x - a = \sin ۵\frac{\pi}{۲} - a = \boxed{۱-a}$$

$$۱-a = -۳ \to \boxed{a=۴}$$

سراسری تجربی ۹۵

۵ -گزینه ۱

از ضابطه بالا برای پیدا کردن حد راست و چپ کمک می گیریم و از هم ارزی برای رفع ابهام استفاده می کنیم :

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^۲ x} = \frac{-\frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۱}{۲}x^۲(\frac{۱}{۲})}{x^۲} = \frac{-\frac{۱}{۴}x^۲}{x^۲} = \boxed{-\frac{۱}{۴}} \Rightarrow \boxed{a = -\frac{۱}{۴}}$$

سراسری تجربی خارج کشور ۹۵

۶ -گزینه ۴

از ضابطه بالایی برای پیدا کردن حد تابع استفاده می کنیم :

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sin ۲x - \sin x}{x^۲} \sim \lim_{x\to ۰} \frac{۲x - x}{x^۲} = \lim_{x\to ۰} \frac{x}{x^۲} = \lim_{x\to ۰} \frac{۱}{x} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x} = +\infty \\ \lim_{x\to ۰^-} \frac{۱}{x} = -\infty \end{cases}$$

حد تابع در $x = ۰$ وجود ندارد ، پس به ازای هیچ مقدار a تابع در $x = ۰$ پیوسته نیست .

۷ -گزینه ۴

از ضابطه بالایی برای پیدا کردن حد تابع استفاده می کنیم ، ضابطه ی بالا بدون مشکل است و نیاز به بررسیِ حد راست و چپ نیست :

$$\lim_{x\to ۰} \frac{x}{۱-\sqrt{۱-x}} \xrightarrow{hop} \lim_{x\to ۰} \frac{۱}{-\frac{-۱}{۲\sqrt{۱-x}}} = ۲$$

مقدار تابع در $x = ۰$ برابر با مقدار a تعریف شده است بنابراین مقدار $a = ۲$ به دست خواهد آمد .

۸ -گزینه ۴

مرز تابع عدد ۱ است و ضابطه ها بدونِ مشکل هستند بنابراین عدد یک را در ضابطه های بالا و پایین قرار می دهیم :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x-۱}{x-\sqrt{x}} \xrightarrow{hop} \lim_{x\to ۰}\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}=۲$$

با جایگذاریِ عدد ۱ در ضابطه ی پائین ، به عبارت $a-a+۲$ می رسیم که در این رابطه ، a ساده می شود و به عدد ۲ می رسیم که با عدد به دست آمده از ضابطه ی بالا برابر است بنابراین به ازای هر مقدار a این تابع در نقطه ی ۱ پیوسته است .

۹ -گزینه ۲

مرز تابع عدد ۳ است و ضابطه ها بدونِ مشکل هستند بنابراین عدد ۳ را در ضابطه های بالا و پایین قرار می دهیم :

$$f(x)=\begin{cases} ax+۲^{x-۳} \xrightarrow{x=۳} ۳a+۲^{۰}=\boxed{۳a+۱} \\ a\log_۲(۱+x) \xrightarrow{x=۳} a\log_۲ ۴=\boxed{۲a} \end{cases} \Rightarrow ۳a+۱=۲a \to \boxed{a=-۱}$$

با به دست آمدن مقدار a و جایگذاری آن در ضابطه ی بالا ، می توانیم مقدار $f(۲)$ را با جایگذاریه عدد ۲ در ضابطه ی بالا به دست آوریم :

$$f(x)=\begin{cases} -x+۲^{x-۳} \xrightarrow{x=۲} f(۲)=-(۲)+۲^{۲-۳}=-۲+\frac{۱}{۲}=-\frac{۳}{۲}=\boxed{-۱/۵} \\ -\log_۲(۱+x) \end{cases}$$

۱۰ -گزینه ۳

گزینه ها به صورت زیر اصلاح شود :

۱) ۰/۵ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۱/۵ ۴) ۲/۵

مرز تابع عدد ۱ است و ضابطه ها بدونِ مشکل هستند بنابراین عدد ۱ را در ضابطه های بالا و پایین قرار می دهیم :

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{ax+۳} \xrightarrow{x=۱} \boxed{\sqrt{a+۳}} \\ x^۲+ax \xrightarrow{x=۱} \boxed{۱+a} \end{cases} \Rightarrow \underline{\sqrt{a+۳}=۱+a} \to a+۳=(۱+a)^۲$$

$$\to a+۳=۱+۲a+a^۲ \to a^۲+a-۲=۰ \to \boxed{a=۱,-۲}$$

از دو مقدار به دست آمده برای a ، فقط مقدار ۱ پذیرفته است زیرا عدد ۲- ، معادله ای که زیر آن خط کشیده شده است را برقرار نمی کند . با جایگذاری a در ضابطه ی بالا ، می توانیم مقدار $f(-\frac{۳}{۴})$ را دست آوریم :

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+۳} \xrightarrow{x=-\frac{۳}{۴}} \boxed{\sqrt{-\frac{۳}{۴}+۳}=\sqrt{\frac{۹}{۴}}=۱/۵} \\ x^{۲}+۱x\end{cases}$$

۱۱ -گزینه ۴

گزینه ها به صورت زیر اصلاح شود :

۱) ۱۲- ۲) ۶- ۳) ۶ ۴) ۱۲

مرز تابع عدد ۲- است و ضابطه ی بالا بـه علـت وجـود قـدرمطلقِ حـاکم در مخـرج ، و اینکـه دقیقـا ریشـه ی قـدر مطلـق هـم عـدد ۲- مـی باشـد . بایـد تعیـین علامـت شـود . پیوسـتگیه چـپ تـابع در نقطـه ی ۲- خواسـته شـده اسـت و بـا جایگـذاری عـدد تقریبـی (مـثلا ۲/۱ -) ، معلـوم مـی شـود کـه علامـت عبـارت درون قـدرمطلق منفـی اسـت و پـس از برداشتن قدرمطلق ، باید علامت منفی قرار دهیم

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۸+x^{۳}}{|x+۲|} & ; \ x\neq -۲ \\ a & ; \ x=-۲\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{۸+x^{۳}}{-x-۲} \xrightarrow{x=-۲} \frac{۰}{۰} \ hop: \frac{۳x^{۲}}{-۱} \xrightarrow{x=-۲} ۱۲ \\ a \quad ; \ x=-۲\end{cases} \Rightarrow \boxed{a=۱۲}$$

۱۲ -گزینه ۴

مرز تابع عدد ۲ است و ضابطه ی بالا به علت وجـود قـدرمطلقِ حـاکم در مخـرج ، و اینکـه دقیقـا ریشـه ی قـدر مطلـق هـم عدد ۲می باشد . باید تعیـین علامـت شـود . وضـعیت پیوسـتگیه تـابع در نقطـه ی ۲خواسـته شـده اسـت و بـا جایگـذاری عدد تقریبی (مثلا ۲/۱ و ۱/۹) ، در دو شـاخه قـدرمطلق را بازنویسـی مـی کنـیم و حـد را در دو شـاخه بررسـی مـی کنـیم :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^{۲}-۴}{۲|x-۲|} \ ; \ x\neq ۲ \rightarrow \begin{cases} ۲^{+}: \frac{x^{۲}-۴}{۲(x-۲)} \xrightarrow{x=۲} \frac{۰}{۰} \rightarrow hop: \frac{۲x}{۲} \xrightarrow{x=۲} \boxed{۲} \\ ۲^{-}: \frac{x^{۲}-۴}{-۲(x-۲)} \xrightarrow{x=۲} \frac{۰}{۰} \rightarrow hop: \frac{۲x}{-۲} \xrightarrow{x=۲} \boxed{-۲}\end{cases} \\ ۲ \quad ; \ x=۲\end{cases}$$

ملاحظه می شود که حد راست تابع با مقدار تابع برابر شده است بنابراین تابع از راست پیوسته است .

تستهای کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور گروه ریاضی در سالهای ۹۳ تا ۹۸ مربوط به مبحث " پیوستگی "

۱۳ -گزینه ۳

مرز تابع عدد ۲ است و ضابطه ها بدونِ مشکل هستند بنابراین عدد ۲ را در ضابطه های بالا و پایین قرار می دهیم :

$$\lim_{x\to ۲}\frac{a(۱+\sqrt[۳]{۱-x})}{x^۲-۲x}\xrightarrow{hop}\lim_{x\to ۲}\frac{a(۰+\frac{-۱}{۳\sqrt[۳]{(۱-x)^۲}})}{۲x-۲}=\frac{a(-\frac{۱}{۳})}{۲}=\boxed{-\frac{a}{۶}}$$

$$x-a\xrightarrow{x=۲}\boxed{۲-a}$$

با برابر قرار دادن عبارتهای به دست آمده با یکدیگر مقدار a پیدا می شود :

$$-\frac{a}{۶}=۲-a\to -a=۱۲-۶a\to ۵a=۱۲\to \boxed{a=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴}$$

۱۴ -گزینه ۳

مرز تابع عدد ۳ است و ضابطه ها بدونِ مشکل هستند بنابراین عدد ۳ را در ضابطه های بالا و پایین قرار می دهیم :

$$\lim_{x\to ۳}\frac{۱-\sqrt{x-\sqrt{x+۱}}}{x-۳}\xrightarrow{hop}\lim_{x\to ۲}\frac{-\frac{۱-\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}}{۲\sqrt{x-\sqrt{x+۱}}}}{۱}=\boxed{-\frac{۳}{۸}}$$

با جایگذاریِ عدد ۳ در ضابطه ی پائین ، به عبارت $۳a-۳a-\frac{۳}{۸}$ می رسیم که در این رابطه ، a ساده می شود و به عدد $-\frac{۳}{۸}$ می رسیم که با عدد به دست آمده از ضابطه ی بالا برابر است بنابراین به ازای هر مقدار a این تابع در نقطه ی ۳ پیوسته است .

۱۵ -گزینه ۲

مرز تابع عدد a است و ضابطه ها بدونِ مشکل هستند بنابراین عدد a را در ضابطه های بالا و پایین قرار می دهیم و با هم برابر قرار می دهیم :

$$\frac{۱}{a}=۱-\frac{a}{۴}\xrightarrow{\times ۴a}۴=۴a-a^۲\to a^۲-۴a+۴=۰\to (a-۲)^۲=۰\to \boxed{a=۲}$$

۱۶ -گزینه ۱

اگر به ضابطه ی بالای تابع کمی دقت کنیم با تابع آشنایی مواجه می شویم که در فصل براکت ها مورد بررسی قرار گرفته است . از آنجائیکه اطراف هر عدد دلخواهی ، یک عدد غیر صحیح است ، حد تابع در تمام نقاط با استفاده از ضابطه ی بالا محاسبه می شود و می دانیم حد تابع با استفاده از ضابطه ی بالا برابر با ۱- است . بنابراین مقدار تابع هم که در ضابطه ی پائین تعریف شده است باید برابر با ۱- باشد . بنابراین مقدار $a=-۱$ به دست می آید .

۱۷ -گزینه ؟

برای تعیین تعداد نقاط ناپیوستگی در این گروه توابع ابتدا بـه سـراغ ریشـه ی مخـرج هـا مـی رویـم و ریشـه مخـرج هـا را تعیین می کنیم :

$$f(x)=\frac{۳-\sqrt{x+۴}}{۱+\sqrt[۳]{x+۱}}+\frac{۱}{x+۵} \to \begin{cases} x+۵=۰ \to \boxed{x=-۵} \\ ۱+\sqrt[۳]{x+۱}=۰ \to \sqrt[۳]{x+۱}=-۱ \to x+۱=-۱ \to \boxed{x=-۲} \end{cases}$$

از ریشـه هـای بـه دسـت آمـده ، عـدد ۵- در دامنـه ی تـابع نیسـت (رادیکـالِ موجـود در صـورت کسـر $\frac{۳-\sqrt{x+۴}}{۱+\sqrt[۳]{x+۱}}$ را تعریف نشده می کند)

بنابراین تنها نقطه ناپیوستگی تابع نقطه ای به طول ۲- است .

تـذکر: مطـابق کتـاب درسـی حسـابان چـاپ ۹۶ – ۹۵ ، چـون نقطـه ۲- متعلـق بـه دامنـه تـابع نیسـت ، ناپیوسـتگی محسوب نمی شود اما مطابق کتـاب درسـی حسـابان چـاپ ۹۷ – ۹۶ ، ایـن نقطـه بـه عنـوان ناپیوسـتگی تـابع تلقـی مـی شود . کلید پیشنهادی سازمان سنجش برای این سـوال منطبـق بـا کتـاب چـاپ سـال ۹۶ – ۹۵ بـوده اسـت !!!! یعنـی تـابع را بدون نقطه ناپیوستگی اعلام کرده اند .

۱۸ -گزینه ۲

مرز تابع عدد صفر است و ضابطه ها بدونِ مشـکل هسـتند بنـابراین عـدد صـفر را در ضـابطه هـای بـالا و پـایین قـرار مـی دهیم ، ضابطه بـالا دارای دو مجهـول اسـت و بـا قـرار دادن مقـدار صـفر در مخـرج کسـر ، بـه صـفر مـی رسـیم بنـابراین صورت کسر هم باید صفر شود یعنی حد به صورت صفر صـفرم تبـدیل شـود و بـدین ترتیـب کلیـد اول بـه صـورت زیـر بـه دست می آید :

$$\sqrt[۳]{x+a}-b \xrightarrow{x=۰} \sqrt[۳]{۰+a}-b=۰ \Rightarrow \boxed{b=\sqrt[۳]{a}} \quad (*)$$

جواب حد بعد از هوپیتال گیری باید با مقدار تابع کـه عـدد $\frac{۱}{۱۲}$ برابـر شـود و کلیـد دوم بـرای حـل دسـتگاه بـه دسـت مـی آید :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{x+a}-b}{x}=\frac{۱}{۱۲} \xrightarrow{hop} \frac{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+a)^۲}}}{۱}=\frac{۱}{۱۲} \xrightarrow{x=۰} \frac{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{a^۲}}}{۱}=\frac{۱}{۱۲}$$

$$\to \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{a^۲}}=\frac{۱}{۱۲} \to \sqrt[۳]{a^۲}=۴ \to a^۲=۶۴ \to \boxed{a=\pm ۸}$$

با به دست آمدن مقدار a و جایگذاری در رابطه ی (*) مقادیر ممکن برای b ، اعداد ۲± به دست می آید .

۱۹ -گزینه ۳

مرز تابع عدد ۲ است و گزینه ها به صورت زیر اصلاح شود :

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

مرز تابع عدد ۲ است و ضابطه ها بدونِ مشکل هستند بنابراین عدد ۲ را در ضابطه های بالا و پایین قرار می دهیم :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} & ; x>2 \rightarrow \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}}=\dfrac{0}{0}\xrightarrow{hop}\dfrac{3}{1-\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}}\xrightarrow{x=2}\boxed{4}\\ ax-1 & ; x<2 \xrightarrow{x=2}\boxed{2a-1}\end{cases}\Rightarrow 2a-1=4\rightarrow \boxed{a=2/5}$$

۲۰ -گزینه ۴

این تابع به علت وجـودِ قـدرمطلق در مـرز ، دارای مرزهـای ۱+ و ۱- اسـت و از آنجائیکـه ضـابطه ی بـالا دارای براکـت اسـت لذا مفهوم حد راست و چپ برای این ضـابطه مهـم اسـت و اعـداد ۱+ و ۱- را در ضـابطه ی بـالا قـرار مـی دهـیم (بـا جهـت مناسب یا بار مناسب) و همین دو عدد را بـدون در نظـر گـرفتن جهـت یـا بـار ، در ضـابطه ی پـائین قـرار مـی دهـیم . بـه عبارت دیگر پیوستگی تابع را یک بار در ۱+ و یک بار هم در ۱- بررسی می کنیم :

$$f(x)=\begin{cases}x[x] & ; |x|<1 \xrightarrow{|x|<1\ \Rightarrow -1<x<1}\begin{cases}1^- : (1)[1^-]=0\\ -1^+ : (-1)[-1^+]=1\end{cases}\\ ax+b & ; |x|\ge 1 \xrightarrow{|x|>1\ \Rightarrow 1<x\ \text{or}\ x<-1}\begin{cases}1 : a+b\\ -1 : -a+b\end{cases}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=0\\ -a+b=1\end{cases}\Rightarrow \boxed{a=-\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{1}{2}}$$

با جایگذاریِ عدد ۳ در ضابطه ی پائین ، به عبـارت $3a-3a-\dfrac{3}{8}$ مـی رسـیم کـه در ایـن رابطـه ، a سـاده مـی شـود و بـه عدد $-\dfrac{3}{8}$ می رسیم که با عدد به دسـت آمـده از ضـابطه ی بـالا برابـر اسـت بنـابراین بـه ازای هـر مقـدار a ایـن تـابع در نقطه ی ۳ پیوسته است .