تستهای کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور گروه تجربی در سالهای ۹۳ تا ۹۸ مربوط به مبحث "کاربرد مشتق"

۱ - گزینه ۲

ریشه های مشتق را به همراه نقاط ابتدا و انتهای بازه در تابع قرار می دهیم :

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-15x \rightarrow f'(x)=x^2-2x-15 \rightarrow (x-5)(x+3)=0$$

$$\Rightarrow x=5 \quad , \quad \boxed{x=-3}$$

$$f(-4)=\frac{68}{3} \quad , \quad f(-3)=27 \; , \quad f(3)=-45$$

پس مقادیر اکسترمم مطلق تابع برابر -45 , ۲۷ می باشند . توجه داریم که عدد ۵ که ریشه مشتق است ، خارج بازه می باشد و نیازی به محاسبه ی مقدار تابع در آن نقطه نیست .

****

۲ - گزینه ۳

تابع به صورت $f(x)=x^4+ax^3+bx$ اصلاح شود . این سوال مربوط به دانش آموزان گروه ریاضی است .

نکاتی که از نمودار تابع استخراج می شود به صورت زیر است :

۱- تابع در نقطه ی ۴- محور طولها را قطع کرده است ، به عبارت دیگر مقدار تابع به ازای $x=-4$ برابر با صفر است .

۲- نقطه ی عطف در مبدا مختصات رخ داده است . به عبارت دیگر به ازای $x=0$ مقدار مشتق دوم برابر صفر است .

$$f(x)=x^4+ax^3+bx \begin{cases} f(-4)=0 \rightarrow 256-64a-4b=0 \xrightarrow{\div 4} \boxed{64-16a-b=0} \quad * \\ f'(x)=4x^3+3ax^2+b \rightarrow f''(x)=12x^2+6ax \xrightarrow{x=0} \boxed{0=0} \end{cases}$$

ملاحظه می شود که دومین کلید نتیجه ی خوبی را به ما نداد و باید به دنبال کلید دیگری از تابع باشیم . در نمودار تابع در مبدا مختصات عطف افقی رخ داده است یعنی شیب خط مماس (مشتق) تابع بع ازای $x=0$ برابر با صفر است :

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+b \xrightarrow{x=0} \boxed{b=0}$$

با جایگذاری $b=0$ در معادله ی * ، مقدار $a=4$ به دست می آید . حال به سراغ مشتق اول و یافتن ریشه های آن و تعیین مقدار مینیمم تابع می رویم :

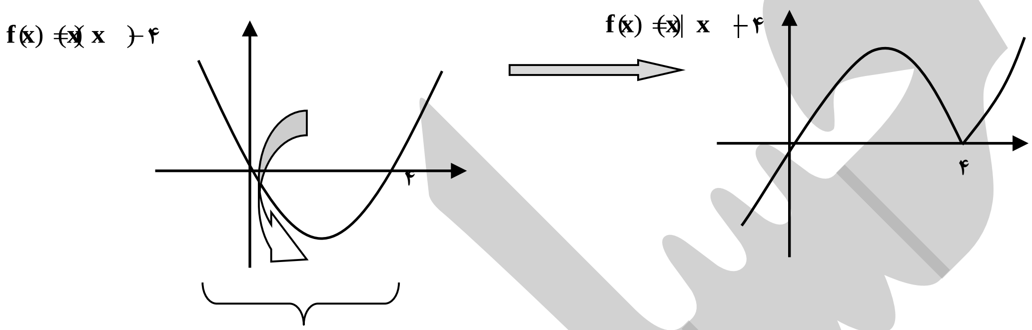
$$f'(x)=4x^3+12x^2=0 \rightarrow 4x^2(x+3)=0 \; \boxed{x=0 \; , \; x=-3}$$

می نیمم تابع در $x=-3$ رخ داده است که با جایگذاری این مقدار در تابع به عدد ۲۷- می رسیم .

****

۳ - گزینه ۲

نحوه رسم این نمودارها در فصل اول جزوه مورد بررسی قرار گرفته است . ابتدا نمودار تابع را بدون قدرمطلق رسم می کنیم و سپس عبارت درون قدرمطلق را تعیین علامت می کنیم و قسمتهایی از تعیین علامت را که علامت نفی دارد ، در شکل رسم شده نسبت به محور x ها دوران می دهیم :



ملاحظه می شود که نقاط ۲ و ۴ به ترتیب ، ماکزیمم و می نیمم نسبی های تابع هستند و برای یافتن فاصله ی میان آنها کافیست عرض های این دو نقطه را بیابیم که با جایگذاری طول های به دست آمده در تابع ، می توانیم به عرض این دو نقطه برسیم که با نقاطی به مختصات (۲ و ۲) و (۰ و ۴) می رسیم که فاصله ی میان آنها بصورت $\sqrt{(۴-۲)^۲+(۲-۰)^۲}=\sqrt{۸}=\boxed{۲\sqrt{۲}}$ خواهد بود .

****

۴ - گزینه ۳

این سوال مربوط به موضوع بهینه سازی می باشد و در زیر موضوع مستطیل های محاط در زیرِ منحنی ها مطرح شده است .
با توجه به نمودار تابع داده شده و وضعیت مستطیل محاط در زیر نمودار این تابع ، مساحت مستطیل محاط به صورت $S=xy$ خواهد بود که در این رابطه ، $y=\sqrt{۱۲-x}$ است که با جایگذاری در فرمول S به رابطه ی $S=x\sqrt{۱۲-x}$ میرسیم که باید از آن مشتق بگیریم . طبق نکات مطرح شده در جزوه در این حالت می توانیم x پشت رادیکال را به زیر رادیکال ببریم و فقط از عبارت زیر رادیکال مشتق بگیریم :

$$S=x\sqrt{۱۲-x}=\sqrt{۱۲x^۲-x^۳} \rightarrow S'=۲۴x-۳x^۲=۰ \rightarrow \boxed{x=۰\ \times\ ,\ x=۸} \rightarrow S_{max}=۸\sqrt{۱۲-۸}=\boxed{۱۶}$$

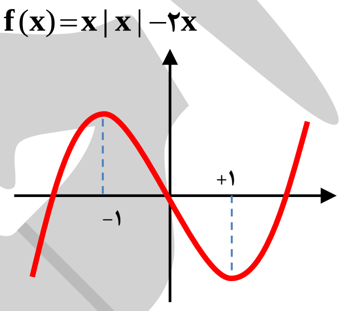
****

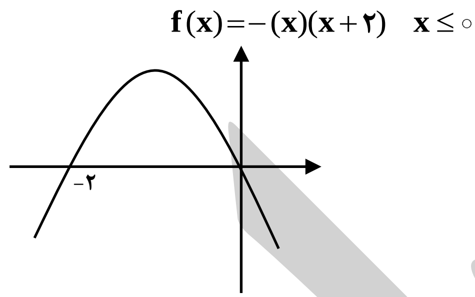
۵ - گزینه ۱

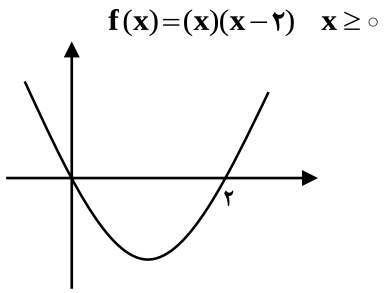
نحوه رسم این نمودارها در فصل اول جزوه مورد بررسی قرار گرفته است . این تابع با استفاده از تعریف قدرمطلق و دو ضابطه ای کردن تابع قابل رسم خواهد بود . این تابع بع دو تابع درجه دوم تبدیل می شود که باید آنها را رسم و با توجه به هم دامنه

ی آنها ، بخشهای مورد نیاز را انتخاب کنیم .

$$f(x)=x|x|-2x=\begin{cases} x^2-2x & x\geq 0 \\ -x^2-2x & x\leq 0 \end{cases}$$







ملاحظه می شود که نقـاط ۱- و ۱+ بـه ترتیـب ، مـاکزیمم و مـی نـیمم نسـبی هـای تـابع هسـتند و بـرای یـافتن فاصـله ی میان آنها کافیست عرض های این دو نقطه را بیابیم که با جایگـذاری طـول هـای بـه دسـت آمـده در تـابع ، مـی تـوانیم بـه عرض این دو نقطه برسیم کـه بـا نقـاطی بـه مختصـات (۱ و ۱-) و (۱- و ۱) مـی رسـیم کـه فاصـله ی میـان آنهـا بصـورت $\sqrt{(1+1)^2+(1+1)^2}=\sqrt{8}=\boxed{2\sqrt{2}}$ خواهد بود .

****

۶ - گزینه ۳

این سوال مربوط به موضوع بهینه سازی می باشد و در زیـر موضـوع مسـتطیل هـای محـاط در زیـرِ منحنـی هـا مطـرح شـده است . در این سوال باید معادله نیم دایره را بدانیم (مثـال ۲۲ جـزوه در فصـل کـاربرد مشـتق) کـه معادلـه نـیم دایـره ای بـه مرکـز مبـداء و شعاع R به صورت $y=\sqrt{R^2-x^2}$ خواهد بود که در این تست بـا توجـه بـه اینکـه شـعاع دایـره برابـر بـا ۶ در نظـر گرفتـه شـده اسـت ، لـذا معادلـه ی ایـن نـیم دایـره بـه صـورت ، $y=\sqrt{36-x^2}$ اسـت کـه بـا جایگـذاری در فرمـول S بـه رابطـه ی $S=2x\sqrt{36-x^2}$ میرسیم که باید از آن مشتق بگیریم . طبـق نکـات مطـرح شـده در جـزوه در ایـن حالـت مـی تـوانیم x پشـت رادیکال را به زیر رادیکال ببریم و فقط از عبارت زیر رادیکال مشتق بگیریم :

$$S=2x\sqrt{36-x^2}=2\sqrt{36x^2-x^4}\ \rightarrow\ S'=72x-4x^3=0\ \rightarrow\ \boxed{x=0\ \times\ ,\ x=\pm\sqrt{18}\rightarrow x=\sqrt{18}=3\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow S_{max}=(2)(3\sqrt{2})\sqrt{36-(3\sqrt{2})^2}=(6\sqrt{2})\sqrt{36-18}=(6\sqrt{2})\sqrt{18}=(6\sqrt{2})(3\sqrt{2})=\boxed{36}$$

نمودارهای مربوط به این تست ، به طور کامل در تمرین ۲۲ جزوه مورد بررسی قرار گرفته است

****

۷- گزینه ۱

مشتق اول و دوم تابع را برای بررسی وضعیت صعودی و نزولی بودن و تقعر محاسبه می کنیم :

$$f'(x) = -۴x^۳ + ۲۴x^۲ - ۳۶x = -۴x\left(x^۲ - ۶x + ۹\right) = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ x = ۰ \end{cases}$$

$x = ۰$ ریشه ساده و $x = ۳$ ریشه مضاعف مشتق اول می باشد لذا تعیین علامت مشتق به صورت $\boxed{+}$ ۰ $\boxed{-}$ ۳ $\boxed{-}$ می باشد بنابراین تابع در بازه $(۰ , +\infty)$ نزولی است .

$$f''(x) = -۱۲x^۲ + ۴۸x - ۳۶ = -۱۲\left(x^۲ - ۴x + ۳\right) = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = ۳ \end{cases} \rightarrow \boxed{-}\ ۱\ \boxed{+}\ ۳\ \boxed{-}$$

با توجه به تعیین علامت مشتق دوم تابع در بازه $(۱ , ۳)$ رو به بالا است . حال باید اشتراک بازه های بدست آمده را محاسبه کنیم در نتیجه تابع در بازه $(۱ , ۳)$ نزولی و رو به بالا می باشد .

****

۸- گزینه ۱

مشتق اول و دوم تابع را برای بررسی وضعیت صعودی و نزولی بودن و تقعر محاسبه می کنیم :

$$f(x) = \frac{۱}{۴}x^۴ + \frac{۱}{۲}x^۳ - ۳x^۲ \rightarrow f'(x) = x^۳ + \frac{۳}{۲}x^۲ - ۶x = ۰ \xrightarrow{\times ۲} ۲x^۳ + ۳x^۲ - ۱۲x = ۰$$

$$x(x^۲ + ۳x - ۱۲) = ۰ \rightarrow \begin{cases} \boxed{x = ۰} \\ x^۲ + ۳x - ۱۲ = ۰ \rightarrow \Delta = ۹ - ۴(۱)(-۱۲) = ۵۷ \rightarrow \boxed{x_۱\ ,\ x_۲ = \frac{-۳ \pm \sqrt{۵۷}}{۲}} \end{cases}$$

هر سه ریشه ی به دست آمده ساده هستند و تعیین علامت در اطراف این سه ریشه به صورت زیر است :

$$\boxed{-}\ \frac{-۳ - \sqrt{۵۷}}{۲}\ \boxed{+}\ ۰\ \boxed{-}\ \frac{-۳ + \sqrt{۵۷}}{۲}\ \boxed{+}$$

به سراغ مشتق دوم و تعیین علامت آن می رویم

$$f'(x) = x^۳ + \frac{۳}{۲}x^۲ - ۶x \rightarrow f''(x) = ۳x^۲ + ۳x - ۶ = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۲ \end{cases} \rightarrow \boxed{+}\ -۲\ \boxed{-}\ ۱\ \boxed{+}$$

با توجه به تعیین علامت مشتق دوم ، تابع در بازه $(-۲ , ۱)$ رو به پائین است . حال باید اشتراک بازه های بدست آمده را محاسبه کنیم (بازه هایی که با رنگ آبی مشخص شده است) در نتیجه تابع در بازه $(-۲ , ۰)$ صعودی و تقعر رو به پائین دارد . (برای اشتراک گیری و درک آن می توانید $\sqrt{۵۷}$ را تقریبا ۷/۶ در نظر بگیرید و ریشه های به دست آمده از مشتق اول و دوم را روی محور اعداد نمایش دهید تا اشتراک بازه ها را به خوبی ملاحظه کنید .)

****

۹- گزینه ۳

چون تابع همواره صعودی است پس در معادله مشتق آن باید $a > ۰$, $\Delta < ۰$ باشد :

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۲(m+۲)x + ۳ \xrightarrow{\Delta<۰} ۴m^۲ + ۱۶m - ۲۰ < ۰$$

$$۴(m-۱)(m+۵) < ۰ \rightarrow \boxed{+} -۵ \boxed{-} ۱ \boxed{+}$$

بنابراین تابع در بازه $(-۵ , ۱)$ همواره صعودی می باشد . نقطه عطف این تابع برابر $\frac{m+۲}{۳} = \frac{-b}{۳a}$ می باشد که با کمک $-۵ < m < ۱$ داریم :

$$-۵ < m < ۱ \xrightarrow{+۲} -۳ < m+۲ < ۳ \xrightarrow{\div ۳} \boxed{-۱ < \frac{m+۲}{۳} < ۱}$$

****

۱۰-گزینه ۳

با توجه به اینکه تابع دارای نقاط ماکسیمم و می نیمم با طول منفی است ، مشتق تابع باید دو ریشه منفی داشته باشد بنابراین باید شرط های زیر در مشتق برقرار باشند :

$$f'(x) = ۲x^۲ - ۲(m-۱)x + ۸$$

$$\Delta > ۰ \rightarrow ۴m^۲ - ۸m - ۶۰ > ۰ \rightarrow ۴(m-۵)(m+۳) > ۰ \rightarrow \boxed{+} -۳ \boxed{-} ۵ \boxed{+}$$

$$-\frac{b}{a} < ۰ \rightarrow \frac{۲m-۲}{۲} < ۰ \rightarrow \boxed{-} ۱ \boxed{+}$$

از اشتراک بازه های فوق $-\infty < m < -۳$ بدست می آید . طول نقطه عطف تابع برابر $\frac{m-۱}{۲}$ می باشد که به کمک $-\infty < m < -۳$ داریم :

$$-\infty < m < -۳ \xrightarrow{-۱} -\infty < m-۱ < -۴ \xrightarrow{\div ۲} -\infty < \frac{m-۱}{۲} < -۲$$

****

۱۱-گزینه ۳

نقطه ی $\mathbf{A(1,-11)}$ نقطه ی عطف تابع است که دو کلید از آن به دست می آید :

$$\mathbf{A(1,-11)} \to \begin{cases} \mathbf{f(1)=-11} \to \mathbf{1+a+b=-11} \to \boxed{\mathbf{a+b=-12}} \xrightarrow{\mathbf{a=-3}} \boxed{\mathbf{b=-9}} \\ \mathbf{f''(1)=0} \to \mathbf{f'(x)=3x^2+2ax+b} \to \mathbf{f''(x)=6x+2a} \xrightarrow{\mathbf{x=1}} \mathbf{6+2a=0} \to \boxed{\mathbf{a=-3}} \end{cases}$$

بـا جایگـذتری مقـادیر بــه دســت آمـده بــرای $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ و جایگـذاری آنهـا در تـابع ، مــی تـوانیم خواسـته ی سـوال یعنـی $\mathbf{f(-1)}$ را محاسبه کنیم

$$\mathbf{y=x^3-3x^2-9x} \xrightarrow{\mathbf{x=-1}} \mathbf{-1-3+9=}\boxed{\mathbf{5}}$$

****

۱۲-گزینه ۳

نقطه ی $\mathbf{A(1,-3)}$ نقطه ی عطف تابع است که دو کلید از آن به دست می آید :

$$\mathbf{A(1,-3)} \to \begin{cases} \mathbf{f(1)=-3} \to \mathbf{a-1-3+b=-3} \to \boxed{\mathbf{a+b=1}} \xrightarrow{\mathbf{a=\frac{1}{3}}} \boxed{\mathbf{b=\frac{2}{3}}} \\ \mathbf{f''(1)=0} \to \mathbf{f'(x)=3ax^2-2x-3} \to \mathbf{f''(x)=6ax-2} \xrightarrow{\mathbf{x=1}} \mathbf{6a-2=0} \to \boxed{\mathbf{a=\frac{1}{3}}} \end{cases}$$

با جایگذتری مقادیر به دست آمده برای $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ و جایگذاری آنهـا در تـابع ، مشـتق اول را حـل و تعیـین علامـت مـی کـنیم تـا نقطـه ی ماکزیمم و مقدار آن به دست آید :

$$\mathbf{f'(x)=3ax^2-2x-3} \xrightarrow{\mathbf{a=\frac{1}{3}}} \mathbf{f'(x)=x^2-2x-3=0} \to \boxed{+}\ \mathbf{-1}\ \boxed{-}\ \mathbf{3}\ \boxed{+}$$

با توجه به تعیین علامت ، ملاحظه می شـود کـه مـاکزیمم تـابع در نقطـه ای بـه طـول ۱- رخ داده اسـت و بـا جایگـذاری ۱- در تـابع ، مقدار ماکزیمم محاسبه می شود :

$$\mathbf{y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+\frac{2}{3}} \xrightarrow{\mathbf{x=-1}} \mathbf{-\frac{1}{3}-1+3+\frac{2}{3}=}\boxed{\mathbf{\frac{7}{3}}}$$

****

۱۳-گزینه ؟

نقطه ی $A(۱\ ,-۲)$ نقطه ی عطف تابع است که دو کلید از آن به دست می آید :

$$A(۱\ ,-۲)\rightarrow\begin{cases} f(۱)=-۲\ \rightarrow\ a+b-۳-۱=-۲\ \rightarrow\ \boxed{a+b=۲}\ \xrightarrow{a=\frac{-b}{۳}}\ \boxed{b=۳}\quad ,\quad \boxed{a=-۱} \\ f''(۱)=۰\ \rightarrow\ f'(x)=۳ax^۲+۲bx-۳\ \rightarrow\ f''(x)=۶ax+۲b\ \xrightarrow{x=۱}۶a+۲b=۰\ \rightarrow\ \boxed{a=\frac{-b}{۳}} \end{cases}$$

با جایگذاری مقادیر به دست آمده برای a , b و جایگذاری آنها در تابع ، مشتق اول را حل و تعیین علامت می کنیم تا نقطه ی ماکزیمم و مقدار آن به دست آید :

$$y=-x^۳+۳x^۲-۳x-۱\ \rightarrow\ f'(x)=-۳x^۲+۶x-۳=۰\ \rightarrow\ -۳(x^۲-۲x+۱)=۰\ \rightarrow\ \boxed{-۳(x-۱)^۲=۰}$$

ملاحظه می شود که مشتق تابع دارای ریشه ی مضاعف است که در اطراف این ریشه تغییر علامت نداریم . بنابراین تابع مورد نظر **اکسترمم ندارد** و ریشه ی مشتق که مضاعف است ، همان نقطه عطف تابع می باشد .

****

۱۴-گزینه ۴

مشتق اول و دوم تابع را برای بررسی وضعیت صعودی و نزولی بودن و تقعر محاسبه می کنیم :

$$f(x)=x^{\frac{۴}{۳}}-۴x^{\frac{۱}{۳}}\ \rightarrow\ f'(x)=\frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}}-\frac{۴}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}=۰\longrightarrow\frac{۴}{۳}(\sqrt[۳]{x}-\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}})=۰$$

$$\frac{x-۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}=۰\rightarrow x-۱=۰\rightarrow\boxed{x=۱}\qquad f':\ \boxed{-}\ \ ۱\ \ \boxed{+}$$

ملاحظه می شود که تابع در بازه ی $(-\infty\ ,\ ۱)$ نزولی است . به سراغ مشتق دوم و تعیین علامت آن می رویم :

$$f''(x)=\frac{۴}{۹}x^{-\frac{۲}{۳}}+\frac{۸}{۹}x^{-\frac{۵}{۳}}=۰\longrightarrow\frac{۴}{۹}(\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}+\frac{۲}{\sqrt[۳]{x^۵}})=۰$$

$$\frac{x+۲}{\sqrt[۳]{x^۵}}=۰\rightarrow x+۲=۰\rightarrow\boxed{x=-۲}\qquad f'':\ \boxed{-}\ \ -۲\ \ \boxed{+}$$

ملاحظه می شود که تابع در بازه ی $(-\infty\ ,\ -۲)$ تقعرش رو به پائین است . با اشتراک گیری از دو مجموعه جوابی که برای مشتق اول و دوم به دست آمده است به بازه ی $(-\infty\ ,\ -۲)$ یعنی گزینه ۴ می رسیم .

****

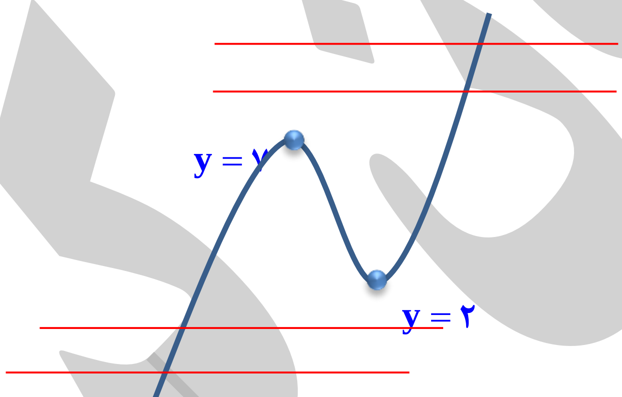
۱۵-گزینه ۱

در تابع درجه سوم داده شده ابتدا مشتق را محاسبه می کنیم تا وضعیت اکسترمم های تابع معلوم شود :

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۱۲x^۲ + ۹ = ۰ \longrightarrow \boxed{x = ۱ \ , \ x = ۳}$$

ملاحظه می شود که تابع دارای دو اکسترمم است .(نمودار تابع را تجسم کنید) عرض اکسترمم ها را با جایگذاری طول های به دست آمده در تابع ، تعیین می کنیم که به مقادیر ۷ و ۲ می رسیم .

برای آنکه خط $f(x) = m$ نمودار تابع را در یک نقطه قطع کند باید از عرض ماکزیمم بیشتر و از عرض می نیمم کمتر باشد . بنابراین $m < ۲$ یا $m > ۷$ خواهد بود .



خطوط قرمز رنگ $f(x) = m$ هستند

****

۱۶-گزینه ۱

موضوع این سوال مربوط به فصل هندسه مختصاتی نظام قدیم است

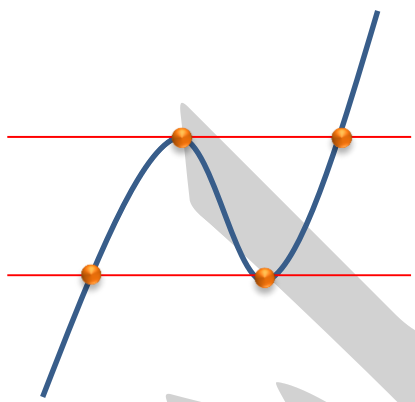
۱۷-گزینه ۱

در تابع درجه سوم داده شده ابتدا مشتق را محاسبه می کنیم تا وضعیت اکسترمم های تابع معلوم شود :

$$f'(x) = -۲x^۲ + ۲x^۲ + ۱۲ = ۰ \xrightarrow{\div(-۲)} x^۲ - x^۲ - ۶ = ۰ \ \boxed{x = -۲ \ , \ x = ۳}$$

ملاحظه می شود که تابع دارای دو اکسترمم است .(نمودار تابع را تجسم کنید) عرض اکسترمم ها را با جایگذاری طول های به دست آمده در تابع ، تعیین می کنیم که به مقادیر $-\frac{۴۴}{۳}$ و ۲۷ می رسیم .

برای آنکه خط $f(x)=m$ نمودار تابع را در دو نقطه قطع کند باید از دقیقا در عرض ماکزیمم و یا عرض می نیمم رسم شود . بنابراین $m=۲۷$ یا $m=-\frac{۴۴}{۳}$ خواهد بود .



۱۸ - گزینه ۳

نکاتی که از نمودار تابع استخراج می شود به صورت زیر است :

۱- تابع در نقطه ی صفرو یک نقطه ی نامعلومِ مثبت ، مشتقش صفر شده است و توجه داریم که در نقطه ی صفر مشتق دارای ریشه ی ساده است (به خاطر تغییر علامت مشتق که از صعود به نزول تغییر کرده است) و در آن نقطه ی مثبتِ نامعلوم ، مشتق تابع دارای ریشه ی مضاعف است (زیرا با وجود افقی شدنِ تابع ، وضعیت نزولی بودن تابع ادامه دار شده است) به عبارت دیگر مشتق این تابع وضعیتی به فرم $f'(x)=mx(x-\alpha)^۲$ داشته است .

۲- یکی از نقاط عطف تابع در همان نقطه ی نامعلومِ مثبت رخ داده است که در آن نقطه مشتق اول تابع و مشتق دوم تابع صفر شده است .

به سراغ مشتق های اول و دوم تابع می رویم تا ببینیم وضعیت مشتق ها به چه صورت خواهد شد :

$$f'(x)=-۴x^۳+۲۴x^۲+۲ax=۰ \rightarrow -۲x(\underbrace{۲x^۲-۱۲x-a}_{\Delta=۰})=۰ \qquad \Delta=۰ \rightarrow ۱۴۴-۴(۲)(-a)=۰ \rightarrow \boxed{a=-۱۸}$$

سوال : آیا مقدار b را می توان به دست آورد ؟

****

۱۹ - گزینه ۳

نکاتی که از نمودار تابع استخراج می شود به صورت زیر است :

۱- تابع در نقطه ی ۱- و یک نقطه ی نامعلومِ مثبت ، مشتقش صفر شده است و توجه داریم که در نقطه ی با طول مثبت ، مشتق دارای ریشه ی ساده است (به خاطر تغییر علامت مشتق که از نزول به صعود تغییر کرده است) و در نقطه ی ۱- ، مشتق تابع دارای ریشه ی مضاعف است (زیرا با وجود افقی شدنِ تابع ، وضعیت نزولی بودن تابع ادامه دار شده است) به عبارت دیگر مشتق این تابع وضعیتی به فرم $f'(x)=m(x-\alpha)(x+۱)^{۲}$ داشته است .

۲- یکی از نقاط عطف تابع در همان نقطه ی ۱- رخ داده است که در آن نقطه مشتق اول تابع و مشتق دوم تابع صفر شده است . به عبارت دیگر : $f''(-۱)=۰\ ,\ f'(-۱)=۰$

به سراغ مشتق های اول و دوم تابع می رویم تا ببینیم وضعیت مشتق ها به چه صورت خواهد شد :

$$f'(x)=۴x^{۳}-۳x^{۲}+۲ax+b \xrightarrow{x=-۱} -۴-۳-۲a+b=۰ \rightarrow \boxed{۲a-b=-۷}$$
$$f''(x)=۱۲x^{۲}-۶x+۲a \xrightarrow{x=-۱} ۱۲+۶+۲a=۰ \rightarrow \boxed{a=-۸}$$
$$\rightarrow \boxed{b=-۹}$$

****

۲۰ - گزینه ۱

برای محاسبه طول نقطه عطف این تابع به سراغ مشتق دوم و تعیین علامت آن می رویم ، از آنجائیکه با تابع رادیکالی مواجه هستیم و قرار است ۲ بار از آن مشتق بگیریم ، بهتر است رادیکال رل به صورت توان گویا بنویسیم و سپس مشتق گیریها را انجام دهیم :

$$f(x)=(۵-x)(x^{\frac{۲}{۳}})=۵x^{\frac{۲}{۳}}-x^{\frac{۵}{۳}} \rightarrow f'(x)=\frac{۱۰}{۳}x^{\frac{-۱}{۳}}-\frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}} \rightarrow f''(x)=\frac{-۱۰}{۹}x^{\frac{-۴}{۳}}-\frac{۱۰}{۹}x^{\frac{-۱}{۳}}=$$

$$-\frac{۱۰}{۹}\left(\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^{۴}}}+\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}\right)=-\frac{۱۰}{۹}\left(\frac{۱}{x\sqrt[۳]{x}}+\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}\right)=-\frac{۱۰}{۹}\left(\frac{۱+x}{x\sqrt[۳]{x}}\right)=۰ \rightarrow \boxed{x=-۱}$$

نقطه ی به دست آمده ریشه ی ساده ی مشتق دوم است که از صورت کسر به دست آمده ، بنابراین بدون تعیین علامت ، این نقطه می تواند نقطه عطف تابع باشد .

****

۲۱ - گزینه ۱

سطح جانبی یک مخروط از رابطه ی $S=\pi\sqrt{r^{2}+h^{2}}$ به دست می آید که باید در ابتدای کار رابطه ای میان r , h تعیین کنیم . برای تعیین رابطه میان این دو متغیر از رابطه ی حجم مخروط کمک می گیریم . در صورت مسئله حجم مخروط داده شده است کافیست رابطه حجم مخروط را بنویسیم که به صورت $V=\frac{1}{3}\pi r^{2}h$ و به جای V مقدار $\frac{\pi}{3}$ را قرار دهیم که در این صورت خواهیم داشت :

$$\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{3}}=\frac{1}{\cancel{3}}\cancel{\pi}r^{2}h \to r^{2}h=1 \to \boxed{r^{2}=\frac{1}{h}}$$

رابطه به دست آمده را در فرمول مساحت جانبی مخروط قرار می دهیم تا به یک تابع یک متغیره بر حسب h تبدیل شود که در این صورت می توانیم مشتق گیری را انجام دهیم :

$$S=\pi\sqrt{r^{2}+h^{2}} \xrightarrow{r^{2}=\frac{1}{h}} S=\pi\sqrt{\frac{1}{h^{2}}+h^{2}}$$

برای مشتق گیری از توابع شامل رادیکال فقط کافیست مشتق عبارت زیر رادیکال را محاسبه کنیم که در این صورت خواهیم داشت :

$$S'=-\frac{2}{h^{3}}+1=0 \to \frac{2}{h^{3}}=1 \to h^{3}=2 \to \boxed{h=\sqrt[3]{2}}$$

تحلیل سوال و بیوگرافی این تست : بهینه سازی یکی از مباحث مورد توجه در کاربرد مشتق است که تنوع طراحی سوال در این مبحث زیاد است . سوالات مربوط به حجم مخروط در بهینه سازی را در سالهای گذشته در کنکورها شاهد بوده ایم اما موضوع سطح جانبی مخروط که در این تست مطرح شده است نمونه ای بی سابقه است که بیشتر دانش آموزان را در نگاه اول به این تست با چالشی بزرگ مواجه می کند . رابطه مربوط به سطح جانبی مخروط به ندرت در مسائل مطرح می شود و فرمول مربوطه در گروه فرمولهایی است که استفاده از آن بیشتر مرتبط با درس هندسه ی پایه است . بنابراین این سوال را می توان یکی از سوالات دشوار کنکور ۹۵ ارزیابی کرد که نمونه ی مشابهی را در تاریخ کنکور نمی توانیم از این دست پیدا کنیم . در کنکورهای سالهای ۸۵ ، ۸۶ ، ۸۷ ، ۸۸ ، ۹۰ ، ۹۱ و ۹۳ و ۹۸ گروه تجربی از بحث بهینه سازی در کنکور سراسری سوال مطرح شده است که این آمار بیانگر توجه طراحان کنکور به این مبحث است که در میان زیر موضوع های متنوعی که در فصل کاربرد مشتق وجود دارد ، این تعداد تست قابل توجه می باشد .

****

۲۲ - گزینه ۱

برای محاسبه طول نقطه اکسترمم این تابع به سراغ مشتق اول و تعیین علامت آن می رویم ، از آنجائیکه با تابع رادیکالی مواجه هستیم و قرار نیست ۲ بار از آن مشتق بگیریم ، بهتر است مشتق گیری از تابع را با همان وضعیت موجود انجام دهیم :

$$f(x)=(x-1)^2(\sqrt[3]{x^2}) \to f'(x)=2(x-1)(\sqrt[3]{x^2})+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(x-1)^2 = 2(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\frac{x-1}{3\sqrt[3]{x}})$$

$$=2(x-1)(\frac{3x+x-1}{3\sqrt[3]{x}}) = =2(x-1)(\frac{4x-1}{3\sqrt[3]{x}})=0 \to \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{4} \end{cases} \to \quad \boxed{+}\ \ \frac{1}{4}\ \ \boxed{-}\ \ 1\ \ \boxed{+}$$

با توجه به تعیین علامت به دست آمده و تعیین قسمت های صعودی و نزولی تابع ، معلوم می شود که نقطه ی $x=\frac{1}{4}$ ماکزیمم تابع است .

****

۲۳ - گزینه ۱

نکاتی که از نمودار تابع استخراج می شود به صورت زیر است :

۱- تابع در نقطه ی ۱+ و نقطه ی صفر ، مشتقش صفر شده است و توجه داریم که در نقطه ی با طول صفر ، مشتق دارای ریشه ی ساده است (به خاطر تغییر علامت مشتق که از نزول به صعود تغییر کرده است) و در نقطه ی ۱+ ، مشتق تابع دارای ریشه ی مضاعف است (زیرا با وجود افقی شدنِ تابع ، وضعیت صعودی بودن تابع ادامه دار شده است) به عبارت دیگر مشتق این تابع وضعیتی به فرم $f'(x)=m(x)(x-1)^2$ داشته است .

۲- یکی از نقاط عطف تابع در همان نقطه ی ۱+ رخ داده است که در آن نقطه مشتق اول تابع و مشتق دوم تابع صفر شده است . به عبارت دیگر : $f'(1)=0\ ,\ f''(1)=0$

۳ – تابع از نقطه ی (۰ و ۰) عبور کرده است که تاثیری در یافتن مجهولات مسئله ندارد

۴- مشتق تابع در نقطه ی صفر برابر با صفر شده است : $f'(0)=0$

به سراغ مشتق های اول و دوم تابع می رویم تا ببینیم وضعیت مشتق ها به چه صورت خواهد شد :

$$f'(x)=12x^3+3ax^2+2bx+c \to \begin{cases} f'(0)=0 \to \boxed{c=0} \\ f'(1)=0 \to 12+3a+2b=0 \to \boxed{3a+2b=-12} \end{cases} \to \begin{cases} 3a+2b=-12 \\ 3a+b=-18 \end{cases} \to \begin{cases} \boxed{\begin{matrix} b=6 \\ a=-8 \end{matrix}} \end{cases}$$

$$f''(x)=36x^2+6ax+2b \xrightarrow{x=1} 36+6a+2b=0 \to \boxed{3a+b=-18}$$

****

۲۴ - گزینه ۳

برای محاسبه طول نقطه اکسترمم مطلق این تابع به سراغ مشتق اول و تعیین علامت آن می رویم ، مجانب قائم تابع که به

راحتی قابل محاسبه است که ریشه ی مخرج می باشد و با خط $x=1$ مواجه هستیم :

$$f(x)=\frac{x^2+2x}{(x-1)^2}\rightarrow f'(x)=\frac{(2x+2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2+2x)}{(x-1)^4}\xrightarrow{\div(x-1)}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x-1)-2(x^2+2x)}{(x-1)^4}\rightarrow f'(x)=\frac{2(x^2-1-x^2-2x)}{(x-1)^4}\rightarrow$$

$$2(x^2-1-x^2-2x)=0\rightarrow -2x-1=0\rightarrow \boxed{x=-\frac{1}{2}}$$

مشتق تابع تنها یک ریشه دارد که این ریشه قطعا اکسترمم تابع است و فاصله ی آن از خط $x=1$ برابر با $\boxed{\frac{3}{2}}$ است .

****

۲۵ - گزینه ۴

تابع داده شده به صورت $f(x)=x^4+ax^3+bx^2$ اصلاح شود و خواسته ی سوال هم $f(-2)$ است .

نکاتی که از نمودار تابع استخراج می شود به صورت زیر است :

۱- تابع در نقطه ی ۳+ و نقطه ی صفر ، مشتقش صفر شده است و توجه داریم که در نقطه ی با طول ۳ ، مشتق دارای ریشه ی ساده است (به خاطر تغییر علامت مشتق که از نزول به صعود تغییر کرده است) و در نقطه ی صفر ، مشتق تابع دارای ریشه ی مضاعف است (زیرا با وجود افقی شدنِ تابع ، وضعیت نزولی بودن تابع ادامه دار شده است) به عبارت دیگر مشتق این تابع وضعیتی به فرم $f'(x)=m(x)^2(x-3)$ داشته است .

۲- یکی از نقاط عطف تابع در همان نقطه ی صفر رخ داده است که در آن نقطه مشتق اول تابع و مشتق دوم تابع صفر شده است . به عبارت دیگر : $f'(0)=0\ ,\ f''(0)=0$

۳ – تابع از نقطه ی (۰ و ۰) عبور کرده است که تاثیری در یافتن مجهولات مسئله ندارد .

۴- مشتق تابع در نقطه ی ۳ برابر با صفر شده است : $f'(3)=0$

به سراغ مشتق های اول و دوم تابع می رویم تا ببینیم وضعیت مشتق ها به چه صورت خواهد شد :

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx\rightarrow\begin{cases}f'(0)=0\rightarrow \times\\ f'(3)=0\rightarrow 108+27a+6b=0\rightarrow \boxed{9a+2b=-36}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}9a+2b=-36\\ b=0\end{cases}\rightarrow\boxed{a=-4}$$

$$f''(x)=12x^2+6ax+2b\xrightarrow{x=0}2b=0\rightarrow\boxed{b=0}$$

تابع به صورت $f(x)=x^4-4x^3$ بازنویسی می شود و $f(-2)$ برابر با ۴۸ خواهد شد .

****

۲۶ - گزینه ۱

برای محاسبه طول نقطه اکسترمم نسبی این تابع به سراغ مشتق اول و تعیین علامت آن می رویم ، مجانب افقی تابع هم که از تقسیم ضرایب پرتوانهای صورت و مخرج به دست می آید و با خط $y=-۱$ مواجه هستیم :

$$f(x)=\frac{۲x-x^۲}{(x+۱)^۲}\rightarrow f'(x)=\frac{(۲-۲x)(x+۱)^۲-۲(x+۱)(۲x-x^۲)}{(x+۱)^۴}\xrightarrow{\div(x+۱)}$$

$$f'(x)=\frac{(۲-۲x)(x+۱)-۲(۲x-x^۲)}{(x-۱)^۴}\rightarrow f'(x)=\frac{۲(۱-x^۲-۲x+x^۲)}{(x-۱)^۴}\rightarrow$$

$$۲(۱-۲x)=۰\rightarrow ۱-۲x=۰\rightarrow \boxed{x=\frac{۱}{۲}}$$

با جایگذاری $x=\frac{۱}{۲}$ در تابع ، عرض اکسترمم به صورت $y=-\frac{۱}{۳}$ به دست می آید و فاصله ی آن از خط $y=-۱$ برابر $\boxed{\frac{۲}{۳}}$ خواهد بود .

****