« پاسخ نامه تشریحی فصل مثلثات »

تستهای کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور گروه تجربی در سالهای ۹۳ تا ۹۸ مربوط به مبحث " مثلثات"

۱ -گزینه ۲

این تست مربوط به دانش آموزان گروه ریاضی می باشد

ابتدا به سراغ فرض مسئله می رویم و به کمک رابطه بسط $\cos$ آنرا باز می کنیم :

$$\frac{۱}{۲}\cos \mathbf{x}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin \mathbf{x}+\frac{۱}{۲}\cos \mathbf{x}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin \mathbf{x}=\frac{۲}{۳} \quad \rightarrow \quad \cos \mathbf{x}=\frac{۲}{۳}$$

برای پیدا کردن $\cos ۲\mathbf{x}$ بر اساس رابطه $\cos^۲ \mathbf{x}-\sin^۲ \mathbf{x}$ به $\sin \mathbf{x}$ نیاز داریم . پس به کمک دستور $\cos^۲ \mathbf{x}+\sin^۲ \mathbf{x}=۱$ مقدار $\sin^۲ \mathbf{x}$ را بدست می آوریم و در رابطه $\cos ۲\mathbf{x}$ جایگذاری می کنیم :

$$\frac{۴}{۹}+\sin^۲ \mathbf{x}=۱ \quad \Rightarrow \quad \sin^۲ \mathbf{x}=\frac{۵}{۹} \quad \rightarrow \quad \cos ۲\mathbf{x}=\frac{۴}{۹}-\frac{۵}{۹}=-\frac{۱}{۹}$$

****

۲-گزینه ۲

در سمت چپ معادله $\cos ۲\mathbf{x}$ را باز کرده و به کمک اتحاد مزدوج داریم :

$$\sin ۲\mathbf{x}\,\cancel{(\sin \mathbf{x}+\cos \mathbf{x})} = \cancel{(\cos \mathbf{x}+\sin \mathbf{x})}(\cos \mathbf{x}-\sin \mathbf{x})(\cos \mathbf{x}-\sin \mathbf{x})$$

$$\sin ۲\mathbf{x}=(\cos \mathbf{x}-\sin \mathbf{x})^۲ \quad \rightarrow \quad \sin ۲\mathbf{x}=\underbrace{\cos^۲ \mathbf{x}+\sin^۲ \mathbf{x}}_{۱}-\underbrace{۲\cos \mathbf{x}\sin \mathbf{x}}_{\sin ۲\mathbf{x}}$$

$$۲\sin ۲\mathbf{x}=۱ \quad \rightarrow \quad \sin ۲\mathbf{x}=\frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} ۲\mathbf{x}=۲\mathbf{k}\pi+\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \boxed{\mathbf{x}=\mathbf{k}\pi+\frac{\pi}{۱۲}} \\ ۲\mathbf{x}=۲\mathbf{k}\pi+\pi+\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \boxed{\mathbf{x}=\mathbf{k}\pi+\frac{۵\pi}{۱۲}} \end{cases}$$

عبارت $\cos \mathbf{x}+\sin \mathbf{x}$ را از طرفین معادله ساده کردیم . اما توجه داریم چون یک عامل ضربی را ساده کرده ایم باید آنرا برابر با صفر قرار دهیم :

$$\cos \mathbf{x}+\sin \mathbf{x}=۰ \quad \rightarrow \quad \sin \mathbf{x}=-\cos \mathbf{x} \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{x}=\mathbf{k}\pi-\frac{\pi}{۴}}$$

حال برای پیدا کردن جوابها در بازه $[\circ,\text{۲}\pi]$ باید به $\mathbf{k}$ مقادیر صحیح بدهیم :

$$\mathbf{k}=\circ \quad \to \quad \mathbf{x}=\frac{\pi}{\text{۱۲}}\,,\,\frac{\text{۵}\pi}{\text{۱۲}}\,,\,\frac{\text{۳}\pi}{\text{۴}}$$

فقط در حالتی که $\mathbf{k}$ برابر صفر باشد جوابها در بازه داده شده قرار می گیرند که مجموع آنها برابر $\frac{\text{۵}\pi}{\text{۴}}$ می باشد .

****

۳ -گزینه ۱

ابتدا به کمک رابطه $\tan\text{۲}\mathbf{x}=\frac{\text{۲}\tan\mathbf{x}}{\text{۱}-\tan^{\text{۲}}\mathbf{x}}$ ، مقدار $\tan\text{۲}\alpha$ را محاسبه می کنیم :

$$\tan\text{۲}\alpha=\frac{\text{۲}\times\text{۲}}{\text{۱}-\text{۴}}=-\frac{\text{۴}}{\text{۳}}$$

حال با استفاده از رابطه $\tan(\mathbf{x}-\mathbf{y})=\frac{\tan\mathbf{x}-\tan\mathbf{y}}{\text{۱}+\tan\mathbf{x}.\tan\mathbf{y}}$ داریم :

$$\tan(\text{۲}\alpha-\beta)=\frac{-\frac{\text{۴}}{\text{۳}}-\frac{\text{۱}}{\text{۳}}}{\text{۱}+\left(-\frac{\text{۴}}{\text{۳}}\times\frac{\text{۱}}{\text{۳}}\right)}=-\text{۳}$$

****

۴ -گزینه ۴

ابتدا تبدیلات مربوط به کمان را در مخرج کسر انجام می دهیم (عوض میشه – نمیشه) :

$$\frac{\sin\text{۳}\mathbf{x}}{\sin\mathbf{x}}=\text{۱} \quad \to \quad \sin\text{۳}\mathbf{x}=\sin\mathbf{x}\begin{cases}\text{۳}\mathbf{x}=\text{۲}\mathbf{k}\pi+\mathbf{x} \quad \to \quad \mathbf{x}=\mathbf{k}\pi\\ \text{۳}\mathbf{x}=\text{۲}\mathbf{k}\pi+\pi-\mathbf{x} \quad \to \quad \mathbf{x}=\frac{\mathbf{k}\pi}{\text{۲}}+\frac{\pi}{\text{۴}}\end{cases}$$

از میان جواب های بدست آمده $\mathbf{x}=\mathbf{k}\pi$ نمی تواند قابل قبول باشد زیرا مخرج کسر را برابر صفر می کند بنابراین جواب کلی معادله به صورت $\mathbf{x}=\frac{\mathbf{k}\pi}{\text{۲}}+\frac{\pi}{\text{۴}}$ می باشد .

****

۵ -گزینه ۲

$$\tan\beta=\frac{۱}{۲}\ \rightarrow\ \cot\beta=۲$$

$$\xrightarrow{۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}} ۱+۴=\frac{۱}{\sin^۲\beta}\ \rightarrow\ \sin\beta=\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

$$\alpha-\beta=\frac{\pi}{۴}\ \rightarrow\ \beta=\alpha-\frac{\pi}{۴}\ \rightarrow\ \sin\left(\alpha-\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin\alpha-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin\alpha-\cos\alpha)=\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

$$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{\sqrt{۱۰}}{۵}\quad (۱)$$

از به توان دو رساندن طرفین رابطه شماره ۱ می توانیم $\sin ۲\alpha$ **را ظاهر کنیم :**

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^۲=\frac{۱۰}{۲۵}\ \rightarrow\ \underbrace{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha}_{۱}-\underbrace{۲\sin\alpha\cos\alpha}_{\sin ۲\alpha}=\frac{۲}{۵}$$

$$\sin ۲\alpha=۱-\frac{۲}{۵}=\frac{۳}{۵}=۰/۶$$

****

۶ -گزینه ۱

$$۲\cos^۲ x+\sin ۲x=۱\ \rightarrow\ ۲\cos^۲ x-۱=-\sin ۲x$$

$$\cos ۲x=-\sin ۲x\ \rightarrow\ ۲x=k\pi-\frac{\pi}{۴}\ \Rightarrow\ \boxed{x=\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸}}$$

****

۷-گزینه ۳

می دانیم $\tan x-\cot x=-۲\cot ۲x$ **بنابراین به سراغ فرض مسئله می رویم و آنرا ساده می کنیم :**

$$-۲\cot x=۱\ \rightarrow\ \cot x=-\frac{۱}{۲}\ \rightarrow\ \tan x=-۲$$

اکنون به استفاده از رابطه $\tan ۲x = \frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x}$ داریم : $\tan ۲x = \frac{۲(-۲)}{۱-۴} = \frac{۴}{۳}$

****

۸ -گزینه ۱

$$\cos ۳x = -\cos x \rightarrow \cos ۳x = \cos(\pi - x)$$

$$\rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \pi - x \rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} & (۱) \\ ۳x = ۲k\pi - \pi + x \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۲} & (۲) \end{cases}$$

جواب شماره ۲ قابل قبول نمی باشد زیرا در صورت تست ذکر شده است $\cos x \neq ۰$ می باشد و اگر جواب های حالت ۲ را در دایره نمایش دهیم ، نقاطی ایجاد می شوند که کسینوس آنها صفر است . بنابراین جواب کلی این معادله به صورت $x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$ می باشد .

****

۹ -گزینه ۱

ابتدا طرفین رابطه ی $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{۱}{۲}$ را به توان دو می رسانیم :

$$\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{۱}{۲} \rightarrow (\sin\alpha - \cos\alpha)^۲ = \frac{۱}{۴} \rightarrow \sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha - ۲\sin\alpha\cos\alpha = \frac{۱}{۴}$$

$$۱ - \sin ۲\alpha = \frac{۱}{۴} \rightarrow \boxed{\sin ۲\alpha = \frac{۳}{۴}}$$

خواسته ی سوال $\cos(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha)$ است که با استفاده از قوانین عوض می شه - نمیشه به صورت $-\sin ۲\alpha$ تبدیل می شود که برابر با $-\frac{۳}{۴}$ خواهد شد .

****

۱۰ -گزینه ۱

ابتدا $\sin^۲ x$ را با استفاده از اتحاد $\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$ تبدیل می کنیم تا معادله ی مثلثاتی داده شده به

فرم معادله ی درجه ی دوم و بر حسب کسینوس تبدیل شود :

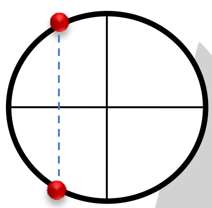
$$۲(۱-\cos^۲ x)+۳\cos x=۰ \to ۲-۲\cos^۲ x+۳\cos x=۰ \to ۲\cos^۲ x-۳\cos x-۲=۰ \to$$

$$\Delta=۹-۴(۲)(-۲)=\boxed{۲۵} \to \cos x=\frac{۳\pm ۵}{۴} \to \cos x=۲ \ , \ \boxed{\cos x=\frac{-۱}{۲}}$$

معادله ی $\cos x=\frac{-۱}{۲}$ در دایره ی به صورت نقاط زیر است که معرفی این دو نقطه هم به راحتی امکان پذیر است :

این دو نقطه نزدیک به نقطه ی فرد π هستند اما در گزینه ها این دو نقطه با استفاده از زوج π معرفی شده اند .

می دانیم این دو نقطه از نقطه ی زوج π به میزان ۱۲۰ درجه جلوتر و عقب تر هستند که گزینه ی اول بیانگر این مجموعه جواب است : $\boxed{۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}}$



****

۱۱ -گزینه ۱

کسر $\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}$ را با استفاده از اتحادها تبدیل می کنیم :

$$\frac{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}{۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{۲}}{\cos\frac{\alpha}{۲}}=\tan\frac{\alpha}{۲} \to \boxed{\tan\frac{\alpha}{۲}=\frac{۱}{۲}}$$

خواسته ی مسئله به صورت $\tan(\frac{\pi}{۲}+\frac{\alpha}{۲})$ است که با استفاده از قوانین عوض می شه - نمیشه ، به فرم $-\cot\frac{\alpha}{۲}$ تبدیل می شود که حاصل این عبارت برابر با ۲- خواهد بود .

****

۱۲ -گزینه ۱

با استفاده از اتحادهای بسط کسینوس ، سمت چپ معادله را باز می کنیم :

$$\cos(x+\frac{\pi}{۴})\cos(x-\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{۴} \to (\cos x\cos\frac{\pi}{۴}-\sin x\sin\frac{\pi}{۴})(\cos x\cos\frac{\pi}{۴}+\sin x\sin\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{۴} \to$$

$$(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin x)(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin x)=\frac{۱}{۴}$$

$$(\frac{\sqrt{۲}}{۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲})(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=\frac{۱}{۴} \to \frac{۱}{۲}(\cos^۲ x+\sin^۲ x)=\frac{۱}{۴} \to \boxed{\cos ۲x=\frac{۱}{۲}}$$

در دایره ی مثلثاتی جایی که مقدار کسینوس برابر با $\frac{۱}{۲}$ است زوایای ۶۰ و ۶۰- است که به صورت $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ معرفی می شوند و با برابر قرار دادن این جواب با مقدار $۲x$، می توانیم جواب معادله را از تقسیم به ۲ کردن به صورت $\boxed{k\pi\pm\frac{\pi}{۶}}$ تعیین کنیم .

****

۱۳-گزینه ۱

با استفاده از قضیه ی کسینوس ها داریم:

$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A \to (۳\sqrt{۷})^۲=۹^۲+x^۲-۲(۹)(x)\cos ۶۰^\circ$$

$$\to ۶۳=۸۱+x^۲-۹x \to x^۲-۹x+۱۸=۰ \to (x-۶)(x-۳)=۰ \to \boxed{x=۶,۳}$$

تذکر : این فرمول که به فرمول ضلع سوم مثلث نیز معروف است در هر مثلثی و برای هر زاویه و دو ضلع مجاورش برقرار است . فراگیری این فرمول توصیه می شود با وجود اینکه در کتاب های درسی نظام جدید اشاره مستقیمی به آن نشده است .

****

۱۴-گزینه ۲

همان طور که می دانیم:

$$\tan\frac{x}{۲}-\cot\frac{x}{۲}=-۲\cot x$$

چون $\tan x=\frac{۴}{۳}$ است بنابراین $\cot x=\frac{۳}{۴}$ می باشد و جواب این تست برابر است با $\boxed{-\frac{۳}{۲}}=-۲\times\frac{۳}{۴}$ خواهد بود .

****

۱۵-گزینه ۳

$$\cos ۲x + ۲\cos^۲ x = ۰ \to \cos ۲x + ۱ + \cos ۲x = ۰ \to \cos ۲x = \underbrace{\cos \frac{۲\pi}{۳}}_{-\frac{۱}{۲}} \to ۲x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \xrightarrow{\div ۲} \boxed{x = k\pi \pm \frac{\pi}{۳}}$$

آیا این تست را با به کار بردن اتحادی دیگر نیز می توانید حل کنید ؟

****

۱۶ -گزینه ۴

می دانیم در متوازی الاضلاع با قطرهای a و b که زاویه ی بین این دو قطر θ است، مساحت برابر است با :

$$S = \frac{۱}{۲}ab\sin\theta \to S = \frac{۱}{۲}(۱۲)(۸\sqrt{۳})\sin ۶۰ = \boxed{۷۲}$$

نکته : در هر متوازی الاضلاع اگر قطرها را رسم کنیم ، ۴ مثلث ایجاد می شود که مساحت این چهار مثلث با هم برابر است . حال در مورد اثبات رابطه ی بالا کمی فکر کنید و سعی کنید فرمول مساحت متوازی الاضلاع را زمانی که دو قطر و زاویه ی میان آنها را داریم ، اثبات کنید .

****

۱۷ -گزینه ۱

$$\sin^۲ \alpha + \cos^۲ \alpha = ۱ \to \sin^۲ \alpha + (\frac{۷}{۹}) = ۱ \to \sin^۲ \alpha = \frac{۲}{۹} \to \sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۳} \to \boxed{\sin\alpha = -\frac{\sqrt{۲}}{۳}}$$

$$\cos(\frac{\pi}{۴} - \alpha) - \cos(\frac{\pi}{۴} + \alpha) = (\cancel{\cos(\frac{\pi}{۴})\cos\alpha} + \sin(\frac{\pi}{۴})\sin\alpha) - (\cancel{\cos(\frac{\pi}{۴})\cos\alpha} - \sin(\frac{\pi}{۴})\sin\alpha) =$$

$$۲\sin\frac{\pi}{۴}\sin\alpha = ۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})\sin\alpha = \sqrt{۲}\sin\alpha = \sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۳}) = \boxed{-\frac{۲}{۳}}$$

****

۱۸ -گزینه ۴

$$\sin 2x+\cos(\frac{\pi}{2}-x)=0 \to \sin 2x+\sin x=0 \to 2\sin x\cos x+\sin x=0 \to \sin x(2\cos x+1)=0$$

$$\begin{cases}\sin x=0 \to x=0\ ,\ \pi\ ,2\pi \\ 2\cos x+1=0 \to \cos x=-\frac{1}{2} \to x=\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\end{cases} \to \pi+2\pi+\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}=\boxed{5\pi}$$

****

۱۹ -گزینه ۳

می دانیم در متوازی الاضلاع با اضلاع a و b که زاویه ی بین این دو ضلع θ است، اندازه ی قطر های بزرگ و کوچک متوازی الاضلاع از روابط زیر تعیین می شوند که با به کار بردن علامت مثبت ، طول قطر بزرگ و با به کار بردن علامت منفی ، طول قطر کوچک محاسبه خواهند شد :

$$c^2=a^2+b^2\pm 2ab\cos A \to c^2=(5+\sqrt{6})^2+(5-\sqrt{6})^2+2(5+\sqrt{6})(5-\sqrt{6})\cos 60^\circ$$

$$=\underbrace{(25+\cancel{10\sqrt{6}}+6)}_{31}+\underbrace{(25-\cancel{10\sqrt{6}}+6)}_{31}+\underbrace{2(25-6)(\frac{1}{2})}_{19}=81 \to \boxed{c=9}$$

نکته : در هر متوازی الاضلاع که دارای ۴ زاویه ی داخلی است ، مجموع زوایای مجاور ۱۸۰ درجه است و زوایای روبرو به هم ، با هم برابر هستند . اگر زاویه ی منفرجه (بیشتر از ۹۰ درجه) میان دو ضلع را دادند ، می توانیم زاویه ی حاده میان اضلاع را به راحتی تعیین کنیم و بالعکس .

****

۲۰ -گزینه ۱

رابطه ی مربوط به بسط سینوس را برای صورت ومخرج در نظر می گیریم :

$$\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}=\frac{\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos x}{\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos x}=\frac{\sin x(\frac{\sqrt{2}}{2})-(\frac{\sqrt{2}}{2})\cos x}{\sin x(\frac{\sqrt{2}}{2})+(\frac{\sqrt{2}}{2})\cos x}=\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})(\sin x-\cos x)}{(\frac{\sqrt{2}}{2})(\sin x+\cos x)}=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$$

$$\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}=2 \xrightarrow{\div \cos x} \frac{\tan x-1}{\tan x+1}=2 \to 2\tan x+2=\tan x-1 \to \boxed{\tan x=-3}$$

کسرهای آبی رنگ را در بالا به عنوان یک اتحاد به خاطر بسپارید . چه از چپ به راست و چه از راست به چپ .

****

۲۱ -گزینه ۴

کافیست یکی از تانژانت های داده شده را معکوس کنـیم و بـه کتانژانـت تبـدیل کنـیم و سـپس طـرفین وسـطین کنـیم تـا به یکی از فرم های مقدماتی معادلات مثلثاتی برسیم :

$$(\frac{۱}{\cot x})(\tan ۳x)=۱ \rightarrow \tan ۳x=\cot x \rightarrow \tan ۳x=\tan(\frac{\pi}{۲}-x)$$

$$\rightarrow ۳x=k\pi+\frac{\pi}{۲}-x \rightarrow ۴x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \rightarrow \boxed{x=\frac{k\pi}{۴}+\frac{\pi}{۸}}$$

****

۲۲ -گزینه ۲

برای محاسبه ی مساحت مثلثی که سه ضلع آن را در اختیار داریـم ابتـدا بـا کمـک رابطـه ی ضـلع سـوم ، کسـینوسِ زاویـه ی میان دو ضلع دلخواه را بـه دسـت مـی آوریـم و بـا اسـتفاده از اتحـاد ، سـینوس زاویـه ی میـان دو ضـلع را تعیـین مـی کنیم و در ادامه با استفاده از رابطه ی $S=\frac{۱}{۲}ab\sin\theta$ ، مساحت مثلث را به دست می آوریم :

$$c^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos A \rightarrow ۸^۲=(۶)^۲+(۴)^۲-۲(۶)(۴)\cos A$$

$$۶۴=۳۶+۱۶-۴۸\cos A \rightarrow ۱۲=-۴۸\cos A \rightarrow \boxed{\cos A=-\frac{۱}{۴}}$$

$$\sin A=\sqrt{۱-\frac{۱}{۱۶}}=\sqrt{\frac{۱۵}{۱۶}}=\boxed{\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}} \rightarrow S=\frac{۱}{۲}ab\sin\theta=\frac{۱}{۲}(۶)(۴)\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}=\boxed{۳\sqrt{۱۵}}$$

سوال ۱ : در حلِ بالا ، به طور دلخواه ، ضلع سوم را ۸ در نظر گـرفتیم . آیـا اگـر ضـلع سـوم را هـر یـک از دو ضـلع دیگـر در نظر بگیریم بازهم به همین جواب خواهیم رسید ؟

سوال ۲ : آیا رابطه ی دیگری را برای محاسبه مساحت مثلثی که ۳ ضلع آن را در اختیار داریم وجود دارد ؟

****

۲۳ -گزینه ۱

با کمی دقت در رابطه ی داده شده در تست ، می بینیم که با بسط سینوس مواجه هستیم . رابطه ی بسط سینوس در این سوال مربوط به بسط $\sin(5x-3x)=\sin 2x$ می باشد . مقدار $\sin 2x$ را داریم و باید $\cos 4x$ را محاسبه کنیم . ارتباط میان کمان ها ، مربوط به روابط 2α است و با کمک یکی از روابط مربوط به کسینوس 2α ، می توانیم به خواسته ی سوال برسیم :

$$\cos 2x=\begin{cases}\cos^2 x-\sin^2 x\\ 2\cos^2 x-1\\ 1-2\sin^2 x\end{cases}\rightarrow \cos 4x=\begin{cases}\cos^2 2x-\sin^2 2x\\ 2\cos^2 2x-1\\ \boxed{1-2\sin^2 2x}\end{cases}$$

$$\cos 4x=1-2\sin^2 2x=1-2\left(\frac{2}{3}\right)^2=1-\frac{8}{9}=\boxed{\frac{1}{9}}$$

****

۲۴ -گزینه ۲

با معادله ی کسری مثلثاتی روبرو هستیم که پس از طرفین وسطین کردن ، فقط صورت کسر را باید حل کنیم و پس از حل معادله ی مربوط به صورت کسر ، ریشه های مخرج را از مجموعه جواب به دست آمده برای صورت کسر ، حذف کنیم :

$$\frac{\sin 3x+\sin 2x}{1+\cos x}=0\rightarrow \sin 3x+\sin 2x=0\rightarrow \sin 3x=\underbrace{-\sin 2x}_{\sin(\pi+2x)}\rightarrow\begin{cases}3x=2k\pi+\pi+2x\\ 3x=2k\pi+\pi-(\pi+2x)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=2k\pi+\pi\\ 5x=2k\pi\rightarrow \boxed{x=\frac{2k\pi}{5}}\end{cases}$$

از دو مجموعه جواب به دست آمده ، مجموعه جواب $x=2k\pi+\pi$ ، که نقاط سمت چپ در دایره ی مثلثاتی هستند ، باعث صفر شدن مخرج می شوند بنابراین نمی توانند به عنوان مجموعه جواب این معادله لحاظ شوند و فقط $x=\frac{2k\pi}{5}$ ، جواب های این معادله می باشند .

****

۲۵ -گزینه ۴

$$\underbrace{\sqrt{1+\tan^2 x}}_{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}}(\underbrace{\underbrace{2\sin^2\frac{\pi}{4}}_{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}}_{2(\frac{1}{2})=1}-\sin^2 x)=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}(1-\sin^2 x)=\frac{1}{|\cos x|}(\overbrace{1-\sin^2 x}^{\cos^2 x})$$

$$\xrightarrow[\cos x<0]{\pi<x<\frac{3\pi}{2}}(-\frac{1}{\cos x})(\cos^2 x)=\boxed{-\cos x}$$

آیا می توانید این تست را با روش عددگذاری حل کنید ؟

****

۲۶ -گزینه ۳

با کمان هایی با مضارب نسبتا بزرگ زوایای $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$ مواجـه هسـتیم کـه بـا عملیـات تقسـیم مـی تـوانیم ایـن مضـارب را کوچک کنیم .

برای زاویه ی $\frac{17\pi}{3}$ ، از تقسـیم عـدد ۱۷ بـر ۳ خـارج قسـمت ۵ و باقیمانـده ۲ اسـت ، بنـابراین زاویـه ی $\frac{17\pi}{3}$ ، معـادل بـا زاویه ی $(\pi+\frac{2\pi}{3})$ است .

می دانیم در این تقسیم هـا اگـر خـارج قسـمت عـددی فـرد شـود ، از π ، و اگـر عـددی زوج شـود از صـفر اسـتفاده مـی کنیم و باقیمانده را در زاویه ی بدون مضرب ، ضرب می کنیم

برای زاویه ی $\frac{17\pi}{6}$ ، از تقسیم عـدد ۱۷ بـر ۶ ، خـارج قسـمت ۲ و باقیمانـده ۵ اسـت ، بنـابراین زاویـه ی $\frac{17\pi}{6}$ ، معـادل بـا زاویه ی $\frac{5\pi}{6}$ است .

برای زاویه ی $\frac{19\pi}{4}$ ، از تقسیم عـدد ۱۹ بـر ۴ ، خـارج قسـمت ۴ و باقیمانـده ۳ اسـت ، بنـابراین زاویـه ی $\frac{19\pi}{4}$ ، معـادل بـا

زاویه ی $\frac{3\pi}{4}$ است .

زاویه ی $\frac{11\pi}{6}$ ، ۱۱ برابر زاویه ی ۳۰ درجه یعنی ۳۳۰ درجه است که به راحتی در دایره قابل نمایش است .

با معادل سازی زوایای داده شده با زوایای کوچکتر و نمایش آنها در دایره مثلثاتی (تجسم ذهنی) می توانیم عددهای مربوط به هر یک از این نسبت ها را به دست آوریم :

$$\sin(\frac{17\pi}{3})\underbrace{\cos(-\frac{17\pi}{6})}_{\cos\frac{17\pi}{6}}+\tan(\frac{19\pi}{4})\underbrace{\sin(\frac{-11\pi}{6})}_{-\sin(\frac{11\pi}{6})}=\underbrace{\sin(\pi+\frac{2\pi}{3})}_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\underbrace{\cos(\frac{5\pi}{6})}_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}+\underbrace{\tan(\frac{3\pi}{4})}_{-1}\underbrace{(-\sin 330^\circ)}_{-(-\frac{1}{2})}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

****

۲۷ -گزینه ۳

در مجهول یابی در این نمودارها ، اولین اقدام مشخص کردن علامت های مجهولات چسبیده به سینوس یا کسینوس می باشد که با توجه به شروع نمودار ، این علامت ها قابل شناسایی هستند .

در این تست با تابع $y=a+b\sin(x+\frac{\pi}{3})$ مواجه هستیم که تنها یک ضریب چسبیده به سینوس وجود دارد که b است . به شروع نمودار (محل برخورد نمودار تابع با محور عرض ها) دقت می کنیم ، تابع شروع – صعود است بنابراین علامت پشت سینوس و ضریب x موجود در کمان باید یکسان باشند . ضریب x که مثبت است بنابراین علامت b هم باید مثبت باشد .

با مشخص شدن علامت b ، به سراغ نمودار و اطلاعات موجود در تابع می رویم تا مجهولات را بیابیم . در نمودار داده شده ، قله ی تابع (ماکزیمم) داده شده است . طبق رابطه ی تعیین ماکزیمم می دانیم در توابع $y=a+b\sin(cx)$ یا $y=a+b\cos(cx)$ مقادیر ماکزیمم و می نیمم از رابطه ی $a\pm|b|$ تعیین می شوند که با توجه به مثبت شدن علامت b در این تست ، مقدار ماکزیمم برابر با $a+b=\sqrt{3}$ می شود که اولین رابطه میان این دو مجهول است .

برای پیدا کردن دومین رابطه میان این دو مجهول ، از نقطه ی کمکی که در شکل داده شده است کمک می گیریم (توجه داریم که این نقطه برای موضوع دوره تناوب کاربردی ندارد زیرا در تابع داده شده ، ضریب x ، مجهول نیست و اساسا موضوع دوره تناوب در این تست هیچ استفاده ای ندارد و موضوع دوره تناوب در تست هایی به کار می رود که در داخل کمان ، ضریب x ، مجهول باشد) .

نقطه ی کمکی $(\pi\ ,\ -\frac{3}{2})$ را در تابع قرار می دهیم تا به دومین معادله بین دو مجهول داده شده دست پیدا کنیم و با کمک دستگاه دو معادله و دو مجهول ، مجهولات را بیابیم :

$$y=a+b\sin(x+\frac{\pi}{3})\xrightarrow{(\pi\ ,\ -\frac{3}{2})}-\frac{3}{2}=a+b\sin(\pi+\frac{\pi}{3})\rightarrow-\frac{3}{2}=a+b(-\frac{\sqrt{3}}{2})\xrightarrow{\times 2}\boxed{2a-\sqrt{3}b=-3}$$

$$\begin{cases}a+b=\sqrt{3}\xrightarrow{\times(-2)}\\ 2a-\sqrt{3}b=-3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-2a-2b=-2\sqrt{3}\\ 2a-\sqrt{3}b=-3\end{cases}\rightarrow-2b-\sqrt{3}b=-2\sqrt{3}-3\rightarrow b(-2-\sqrt{3})=-2\sqrt{3}-3$$

$$b=\frac{-2\sqrt{3}-3}{-2-\sqrt{3}}=\boxed{\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}}\xrightarrow{\times\ \text{mozdavaje makhraj}}\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}\times\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-2}=\frac{3\sqrt{3}-6+6-4\sqrt{3}}{3-4}=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=\boxed{\sqrt{3}}$$

دستگاهِ نامردی بود !!

****

۲۸ -گزینه ۱

$$\frac{\tan x}{\underbrace{\sqrt{1+\tan^2 x}}_{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}}}(\frac{1}{\sin x}-\sin x)=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}}(\frac{1-\sin^2 x}{\sin x})=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{|\cos x|}}(\frac{\overbrace{1-\sin^2 x}^{\cos^2 x}}{\sin x})$$

$$\xrightarrow[\cos x<0]{\frac{\pi}{2}<x<\pi}(\frac{\frac{\sin x}{\cancel{\cos x}}}{-\frac{1}{\cancel{\cos x}}})(\frac{\cos^2 x}{\sin x})=(-\cancel{\sin x})(\frac{\cos^2 x}{\cancel{\sin x}})=\boxed{-\cos^2 x}$$

آیا می توانید این تست را با روش عددگذاری حل کنید ؟

****

۲۹ -گزینه ۳

پرانتز هایی که به عنوان کمان ها در این تست داده شده اند همگی مرتبط با قوانین عوض میشه – نمیشه هستند

که می توانیم با استفاده از این قوانین ، خواسته ی این تست را کمی مرتب کنیم :

$$\underbrace{\sin(\frac{9\pi}{2}+\alpha)}_{\frac{\pi}{2}+\alpha}\underbrace{\cos(\frac{7\pi}{2}-\alpha)}_{\frac{3\pi}{2}+\alpha}-\underbrace{\tan(\alpha-\frac{3\pi}{2})}_{-\tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cot\alpha}=(\cos\alpha)(-\sin\alpha)+\cot\alpha \xrightarrow{\tan\alpha=\frac{4}{3}\to 1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

$$\tan\alpha=\frac{4}{3}\to 1+\frac{16}{9}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\to\cos^2\alpha=\frac{9}{25}\xrightarrow{\alpha\in(\pi,\frac{3\pi}{2})}\cos\alpha=-\frac{3}{5}\ ,\ \sin\alpha=-\frac{4}{5}\ ,\ \cot\alpha=\frac{3}{4}$$

$$\underbrace{(\cos\alpha)}_{-\frac{3}{5}}\underbrace{(-\sin\alpha)}_{\frac{4}{5}}+\underbrace{\cot\alpha}_{\frac{3}{4}}=-\frac{12}{25}+\frac{3}{4}=\boxed{\frac{27}{100}=0/27}$$

****

۳۰ -گزینه ۲

در مجهول یابی در این نمودارها ، اولین اقدام مشخص کردن علامت های مجهولات چسبیده به سینوس یا کسینوس می باشد که با توجه به شروع نمودار ، این علامت ها قابل شناسایی هستند .

در این تست با تابع $y=a+b\cos(\frac{\pi}{2}-x)$ مواجه هستیم که با قوانین عوض میشه – نمیشه ، به تابع $y=a+b\sin(x)$ تبدیل می شود .

تنها یک ضریب چسبیده به سینوس وجود دارد که b است . به شروع نمودار (محل برخورد نمودار تابع با محور عرض ها) دقت می کنیم ، تابع شروع – صعود است بنابراین علامت پشت سینوس و ضریب x موجود در کمان باید یکسان باشند . ضریب x که مثبت است بنابراین علامت b هم باید مثبت باشد .

با مشخص شدن علامت b ، به سراغ نمودار و اطلاعات موجود در تابع می رویم تا مجهولات را بیابیم . در نمودار داده شده ، قله ی تابع (ماکزیمم) معلوم است . طبق رابطه ی تعیین ماکزیمم می دانیم در توابع $y=a+b\sin(x)$ یا $y=a+b\cos(cx)$ مقادیر ماکزیمم و می نیمم از رابطه ی $a\pm|b|$ تعیین می شوند که با توجه به مثبت شدن علامت b در این تست ، مقدار ماکزیمم برابر با $a+b=3$ می شود که اولین رابطه میان این دو مجهول است .

برای پیدا کردن دومین رابطه میان این دو مجهول ، از نقطه ی کمکی که در شکل داده شده است کمک می گیریم (توجه داریم که این نقطه برای موضوع دوره تناوب کاربردی ندارد زیرا در تابع داده شده ، ضریب x ، مجهول نیست

و اساسا موضوع دوره تناوب در این تست هیچ استفاده ای ندارد و موضوع دوره تناوب در تست هایی به کار می رود که در داخل کمان ، ضریب x ، مجهول باشد) .

نقطه ی کمکی $(-\frac{5\pi}{6}, 0)$ را در تابع قرار می دهیم تا به دومین معادله بین دو مجهول داده شده دست پیدا کنیم و با کمک دستگاه دو معادله و دو مجهول ، مجهولات را بیابیم :

$$y = a + b\sin(x) \xrightarrow{(-\frac{5\pi}{6}, 0)} 0 = a + b\sin(-\frac{5\pi}{6}) \to 0 = a + b(-\frac{1}{2}) \xrightarrow{\times 2} \boxed{2a - b = 0}$$

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 2a - b = 0 \end{cases} \xrightarrow{\oplus} 3a = 3 \to \boxed{a = 1, b = 2}$$

دستگاهِ نامردی نبود

با پیدا شدن مجهولات ، می توانیم مقدار تابع را در نقطه ی $x = \frac{\pi}{6}$ به دست آوریم :

$$y = a + b\sin(x) \xrightarrow{a=1,\ b=2,\ x=\frac{\pi}{6}} y = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{6}) = 1 + 2(\frac{1}{2}) = \boxed{2}$$

****

سوال و پاسخ تستهای کنکورسراسری داخل کشور گروه تجربی در سال ۹۹ مربوط به مبحث " مثلثات "

سراسری تجربی داخل کشور ۹۹ - سوال ۱۴۰ دفترچه

۱۴۰ - حاصل عبارت $\tan(300)\cos(210) + \tan(480)\sin(840)$ ، کدام است ؟ (اعداد داده شده بر حسب درجه هستند)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ - گزینه ۲ :

کافیست جای زوایا را در دایره مثلثاتی پیدا کنیم و با تجسم ذهنی و قوانین کوچیکه - بزرگه ، مقادیر نسبت های خواسته شده را به دست آوریم . فقط زاویه ۴۸۰ درجه و ۸۴۰ درجه از ۳۶۰ بیشتر هستند که اگر آنها بر ۳۶۰ درجه تقسیم کنیم ، باقیمانده ی هر دو تقسیم برابر با ۱۲۰ درجه خواهد شد ، یعنی این زوایا پس از چرخش در دایره روی زاویه ۱۲۰ درجه قرار می گیرند :

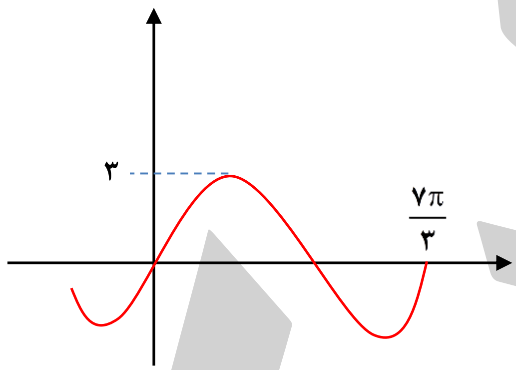
$$\underbrace{\tan(۳۰۰)}_{-\sqrt{۳}}\underbrace{\cos(۲۱۰)}_{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}+\underbrace{\tan(۴۸۰)}_{-\sqrt{۳}}\underbrace{\sin(۸۴۰)}_{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۳}{۲}-\frac{۳}{۲}=\boxed{۰}$$

❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊

سراسری تجربی داخل کشور ۹۹ – سوال ۱۴۱ دفترچه

۱۴۱ – شکل زیر قسمتی از نمودار تابع با ضابطه ی $y=a+b\sin(\frac{\pi}{۲}+x)$ است ، مقدار b کدام است ؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۳



پاسخ – گزینه ۴ :

در مجهول یابی در این نمودارها ، اولین اقدام مشخص کردن علامت های مجهولات چسبیده به سینوس یا کسینوس می باشد که با توجه به شروع نمودار ، این علامت ها قابل شناسایی هستند .

در این تست با تابع $y=a+b\sin(\frac{\pi}{۲}+x)$ مواجه هستیم که با قوانین عوض میشه – نمیشه ، به تابع $y=a+b\cos(x)$ تبدیل می شود .

تنها یک ضریب چسبیده به کسینوس وجود دارد که b است . به شروع نمودار (محل برخورد نمودار تابع با محور عرض ها) دقت می کنیم ، تابع شروع – صعود است و معکوس تابع کسینوس در حالت استاندارد است بنابراین علامت پشت کسینوس باید منفی باشند . ضریب x در نمودارهای کسینوسی تاثیری در اصلی یا برعکس بودن تابع ندارد .

با مشخص شدن علامت b ، به سراغ نمودار و اطلاعات موجود در تابع می رویم تا مجهولات را بیابیم . در نمودار داده شده ، قله ی تابع (ماکزیمم) معلوم است . طبق رابطه ی تعیین ماکزیمم می دانیم در توابع $y=a+b\sin(x)$ یا $y=a+b\cos(cx)$ مقادیر ماکزیمم و می نیمم از رابطه ی $a\pm|b|$ تعیین می شوند که با توجه به منفی شدن علامت b در این تست ، مقدار ماکزیمم برابر با $a-b=۳$ می شود که اولین رابطه میان این دو مجهول است .

برای پیدا کردن دومین رابطه میان این دو مجهول ، از نقطه ی کمکی که در شکل داده شده است کمک می گیریم (توجه داریم که این نقطه برای موضوع دوره تناوب کاربردی ندارد زیرا در تابع داده شده ، ضریب x ، مجهول نیست و اساسا موضوع دوره تناوب در این تست هیچ استفاده ای ندارد و موضوع دوره تناوب در تست هایی به کار می رود که در داخل کمان ، ضریب x ، مجهول باشد) .

نقطه ی کمکی $(\frac{۷\pi}{۳}, ۰)$ را در تابع قرار می دهیم تا به دومین معادله بین دو مجهول داده شده دست پیدا کنیم و با کمک دستگاه دو معادله و دو مجهول ، مجهولات را بیابیم :

$$y = a + b\cos(x) \xrightarrow{(\frac{۷\pi}{۳}, ۰)} ۰ = a + b\cos(\frac{۷\pi}{۳}) \to ۰ = a + b(\frac{۱}{۲}) \xrightarrow{\times ۲} \boxed{۲a + b = ۰}$$

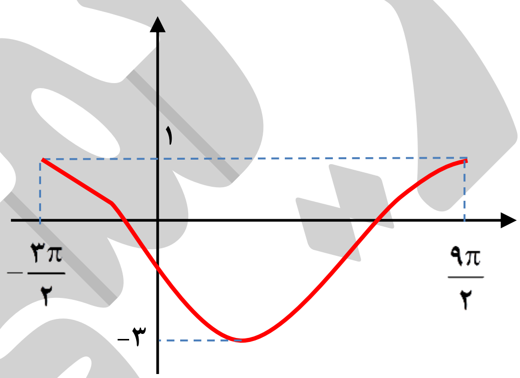
$$\begin{cases} a - b = ۳ \\ ۲a + b = ۰ \end{cases} \xrightarrow{\oplus} ۳a = ۳ \to \boxed{a = ۱, b = -۲}$$

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

سراسری تجربی داخل کشور ۹۹ - سوال ۱۴۲ دفترچه

۱۴۲ - شکل زیر ، نمودار تابع $y = a\sin(bx) + c$ را در یک بازه ی تناوب، نشان می دهد ، نسبت $\frac{a}{b}$ ، کدام است ؟

۱) -۲ ۲) -۳ ۳) -۴ ۴) -۶



پاسخ - گزینه ۴ :

در مجهول یابی در این نمودارها ، اولین اقدام مشخص کردن علامت های مجهولات چسبیده به سینوس یا کسینوس می باشد که با توجه به شروع نمودار ، این علامت ها قابل شناسایی هستند .

در این تست با تابع $y = a\sin(bx) + c$ مواجه هستیم دو ضریب چسبیده به سینوس وجود دارد که b , a هستند . به شروع نمودار (محل برخورد نمودار تابع با محور عرض ها) دقت می کنیم ، تابع شروع - نزول است و معکوس

تابع سینوس در حالت استاندارد است بنابراین علامت ضرایب چسبیده به سینوس باید مختلف العلامه باشند که به طور دلخواه a را مثبت b را منفی در نظر می گیریم . خواسته ی سوال هم تقسیم آنهاست که در هر دو حالت نتیجه یکسان خواهد بود .

با مشخص شدن علامت های a , b ، به سراغ نمودار و اطلاعات موجود در تابع می رویم تا مجهولات را بیابیم . در نمودار داده شده ، قله ی تابع (ماکزیمم) و دره تابع (می نیمم) معلوم است . طبق رابطه ی تعیین ماکزیمم می دانیم در توابع $y=a+b\sin(cx)$ یا $y=a+b\cos(cx)$ مقادیر ماکزیمم و می نیمم از رابطه ی $a\pm|b|$ تعیین می شوند که با توجه به مثبت شدن علامت a در این تابع ($y=a\sin(bx)+c$) ، مقادیر ماکزیمم و می نیمم برابر با $c+a=۱$, $c-a=-۳$ می شود که با حل این دستگاه ، مجهولات a , c به دست می آیند:

$$\boxed{c=-۱\,,\,a=۲}$$

برای پیدا کردن مجهول b کافیست به دوره تناوب موجود در نمودار داده شده و همچنین رابطه ی دوره تناوب در تابع داده شده دقت کنیم . دوره تناوب داده شده در شکل از تفاضل طول های ابتدا و انتهای شکل به دست می آید که مقدار $\frac{۹\pi}{۲}-(-\frac{۳\pi}{۲})=۶\pi$ خواهد بود و دوره تناوب در تابع داده شده نیز به صورت $T=\frac{۲\pi}{|b|}\xrightarrow{b<۰}T=\frac{۲\pi}{-b}$ خواهد بود که از برابر قرار دادن این دو مقدار به دست آمده برای دوره تناوب ، مقدار مجهول b هم به دست می آید که برابر با $T=\frac{۲\pi}{-b}=۶\pi\rightarrow\boxed{b=-\frac{۱}{۳}}$ خواهد شد و حاصل تقسیم $\frac{a}{b}$ برابر با -۶ می شود .

****

سراسری تجربی داخل کشور ۹۹ – سوال ۱۴۳ دفترچه

۱۴۳ – جواب های معادله مثلثاتی $\sin(۲x-\frac{\pi}{۴})=\cos(x+\frac{\pi}{۴})$ ، با شرط $x\neq k\pi$ ، که در آن k یک عدد صحیح است ، کدام است ؟

۱) $\frac{k\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲k\pi}{۳}-\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}$

پاسخ – گزینه ۴ :

با معادله ی دو نسبتی غیر هم جنس (بدون ضریب و توان) مواجه هستیم که کافیست جنس نسبت های طرفین تساوی را با استفاده از رابطه ی $(\frac{\pi}{۲}-x)$ ، یکسان کنیم .

$$\sin(2x-\frac{\pi}{4})=\cos(x+\frac{\pi}{4}) \rightarrow \sin(2x-\frac{\pi}{4})=\sin(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{4}) \rightarrow \sin(2x-\frac{\pi}{4})=\sin(-x+\frac{\pi}{4})$$

$$\sin O=\sin\square \rightarrow \begin{cases} O=2k\pi+\square \\ O=2k\pi+\pi-\square \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-\frac{\pi}{4}=2k\pi-x+\frac{\pi}{4} \rightarrow 3x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \rightarrow \boxed{x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}} \\ 2x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi+x-\frac{\pi}{4} \rightarrow \boxed{x=2k\pi+\pi} \ \times \end{cases}$$

از دو مجموعه جواب به دست آمده فقط اولین دسته جواب پذیرفته است زیرا طبق شرط موجود در صورت سوال ، جوابها نباید نقاط راست و چپ در دایره باشند ($x\neq k\pi$) و این در حالیست که دومین مجموعه جواب ($x=2k\pi+\pi$) نقاط سمت چپ را در دایره ایجاد می کند .

سوال و پاسخ تستهای کنکورسراسری خارج کشور گروه تجربی در سال ۹۹ مربوط به مبحث " مثلثات "

سراسری تجربی خارج کشور ۹۹ - سوال ۱۴۰ دفترچه

۱۴۰ - حاصل عبارت $\tan(285)\tan(-165)+\sin(1095)\cos(255)$ ، کدام است ؟ (اعداد داده شده بر حسب درجه هستند)

۱) $\sin^2(15)$ ۲) $\cos^2(15)$ ۳) $-\sin^2(15)$ ۴) $-\cos^2(15)$

پاسخ - گزینه ۴ :

کافیست جای زوایا را در دایره مثلثاتی پیدا کنیم و با تجسم ذهنی و قوانین عوض میشه - نمیشه ، مقادیر نسبت های خواسته شده را به دست آوریم . فقط زاویه ۱۰۹۵ درجه از ۳۶۰ بیشتر است که اگر آن بر ۳۶۰ درجه تقسیم کنیم ، باقیمانده ی تقسیم برابر با ۱۵ درجه خواهد شد ، یعنی این زاویه پس از ۳ دور چرخش کامل در دایره ،روی زاویه ۱۵ درجه قرار می گیرند . توجه داریم که تمام زاویه های داده شده به نوعی با زاویه ی ۱۵ درجه در ارتباط هستند :

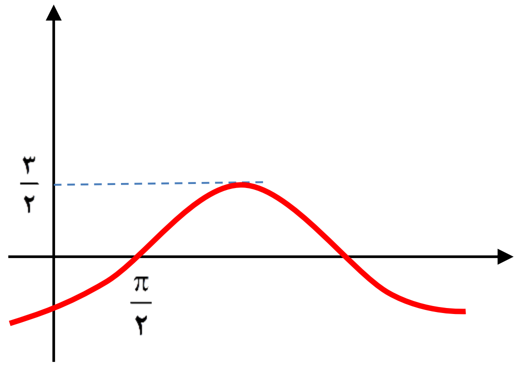
$$\underbrace{\tan(285)}_{\tan(\frac{3\pi}{2}+15)}\underbrace{\tan(-165)}_{-\tan(\pi-15)}-\underbrace{\sin(1095)}_{\sin 15}\underbrace{\cos(255)}_{\cos(\frac{3\pi}{2}-15)}=(-\cot 15)(\tan 15)-(\sin 15)(-\sin 15)=-1+\sin^2 15=\boxed{-\cos^2(15)}$$

****

سراسری تجربی خارج کشور ۹۹ - سوال ۱۴۱ دفترچه

۱۴۱ - شکل زیر قسمتی از نمودار تابع با ضابطه ی $y=a+b\sin(x+\frac{\pi}{3})$ است ، مقدار a کدام است ؟

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1



پاسخ – گزینه ۲ :

در مجهول یابی در این نمودارها ، اولین اقدام مشخص کردن علامت های مجهولات چسبیده به سینوس یا کسینوس می باشد که با توجه به شروع نمودار ، این علامت ها قابل شناسایی هستند .

در این تست با تابع $y = a + b\sin(x + \frac{\pi}{۳})$ مواجه هستیم که تنها یک ضریب چسبیده به سینوس وجود دارد که b است . به شروع نمودار (محل برخورد نمودار تابع با محور عرض ها) دقت می کنیم ، تابع شروع – صعود است بنابراین علامت پشت سینوس و ضریب x موجود در کمان باید یکسان باشند . ضریب x که مثبت است بنابراین علامت b هم باید مثبت باشد .

با مشخص شدن علامت b ، به سراغ نمودار و اطلاعات موجود در تابع می رویم تا مجهولات را بیابیم . در نمودار داده شده ، قله ی تابع (ماکزیمم) داده شده است . طبق رابطه ی تعیین ماکزیمم می دانیم در توابع $y = a + b\sin(x)$ یا $y = a + b\cos(cx)$ مقادیر ماکزیمم و می نیمم از رابطه ی $a \pm |b|$ تعیین می شوند که با توجه به مثبت شدن علامت b در این تست ، مقدار ماکزیمم برابر با $a + b = \frac{۳}{۲}$ می شود که اولین رابطه میان این دو مجهول است .

برای پیدا کردن دومین رابطه میان این دو مجهول ، از نقطه ی کمکی که در شکل داده شده است کمک می گیریم (توجه داریم که این نقطه برای موضوع دوره تناوب کاربردی ندارد زیرا در تابع داده شده ، ضریب x ، مجهول نیست و اساسا موضوع دوره تناوب در این تست هیچ استفاده ای ندارد و موضوع دوره تناوب در تست هایی به کار می رود که در داخل کمان ، ضریب x ، مجهول باشد) .نقطه ی کمکی $(\frac{\pi}{۲}, ۰)$ را در تابع قرار می دهیم تا به دومین معادله بین دو مجهول داده شده دست پیدا کنیم و با کمک دستگاه دو معادله و دو مجهول ، مجهولات را بیابیم :

$$y = a + b\sin(x + \frac{\pi}{۳}) \xrightarrow{(\frac{\pi}{۲}, ۰)} ۰ = a + b\sin(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}) \to -\frac{۳}{۲} = a + b(-\frac{۱}{۲}) \xrightarrow{\times ۲} \boxed{۲a - b = -۳}$$

$$\begin{cases} a + b = \frac{۳}{۲} \\ ۲a - b = -۳ \end{cases} \xrightarrow{\oplus} ۳a = -\frac{۳}{۲} \to \boxed{a = -\frac{۱}{۲}}$$

****

سراسری تجربی خارج کشور ۹۹ - سوال ۱۴۲ دفترچه

۱۴۲ - تعداد جواب های معادله مثلثاتی $4sn(3x)\cos(3x)=1$ ، در بازه ی $[0 , \frac{\pi}{2}]$ ، کدام است ؟

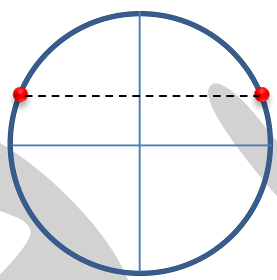
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ - گزینه ۴ :

با استفاده از اتحاد $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ ، سمت چپ معادله ی داده شده را کمی مرتب می کنیم :

$$4\sin(3x)\cos(3x)=1 \rightarrow 2(\underbrace{2\sin(3x)\cos(3x)}_{\sin 6x})=1 \rightarrow 2\sin 6x=1 \rightarrow \boxed{\sin 6x=\frac{1}{2}}$$

با یک معادله ی تک نسبتی با عدد آشنا در سمت راست معادله روبرو هستیم که کافیست جوابها را در دایره نمایش دهیم و آنها را معرفی کنیم :

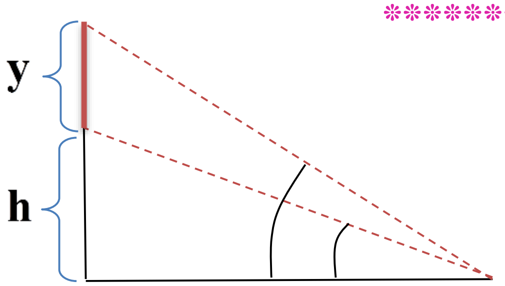


$$\sin 6x=\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 6x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \rightarrow \boxed{x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{36}} \rightarrow k=0 \rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{36}} \quad , k=1 \rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{36}} \\ 6x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \rightarrow \boxed{x=\frac{k\pi}{3}+\frac{5\pi}{36}} \rightarrow k=0 \rightarrow \boxed{x=\frac{5\pi}{36}} \quad , k=1 \rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{36}} \end{cases}$$

با ۴ جواب در بازه ی داده شده مواجه هستیم و اگر مقدار دهی به k را ادامه دهیم ، جواب ها از ۹۰ درجه که انتهای بازه هستند ، عبور می کنند .

****

۳۱ -گزینه ۳



y = طول مجسمه

h = ارتفاع ستون

$$\left.\begin{array}{l} \tan ۴۵^\circ = \dfrac{y+h}{۳۵} = ۱ \quad \to \quad y+h = ۳۵ \\ \tan ۴۰^\circ = \dfrac{h}{۳۵} = ۰/۸ \quad \to \quad h = ۰/۸ \times ۳۵ = ۲۸ \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y + ۲۸ = ۳۵ \quad \to \quad \boxed{y = ۷}$$

****

۳۲ -گزینه ۴

در مجهول یابی در این نمودارها ، اولین اقدام مشخص کردن علامت های مجهولات چسبیده به سینوس یا کسینوس می باشد که با توجه به شروع نمودار ، این علامت ها قابل شناسایی هستند .

در این تست با تابع $y = a - ۲\cos(bx + \frac{\pi}{۲})$ مواجه هستیم که با قوانین عوض میشه – نمیشه ، به تابع $y = a + ۲\sin(bx)$ تبدیل می شود .

تنها یک ضریب چسبیده به سینوس وجود دارد که b است و در داخل کمان قرار دارد . به شروع نمودار (محل برخورد نمودار تابع با محور عرض ها) دقت می کنیم ،اگر به امتداد تابع کمی دقت کنیم می بینیم که تابع شروع – صعود است و تابع اصلی سینوس در حالت استاندارد است بنابراین علامت پشت سینوس و ضریب داخل کمان باید هم علامت باشند . ضریب پشت سینوس مثبت است بنابراین علامت b هم باید مثبت باشد . با مشخص شدن علامت b ، به سراغ نمودار و اطلاعات موجود در تابع می رویم تا مجهولات را بیابیم . در نمودار داده شده ، قله ی تابع (ماکزیمم) معلوم است . طبق رابطه ی تعیین ماکزیمم می دانیم در توابع $y = a + b\sin(cx)$ یا $y = a + b\cos(cx)$ مقادیر ماکزیمم و می نیمم از رابطه ی $a \pm |b|$ تعیین می شوند که با توجه به منفی شدن علامت b در این تست ، مقدار ماکزیمم برابر با $a + ۲ = ۱ \to \boxed{a = -۱}$ می شود . برای پیدا کردن b به سراغ دوره تناوب در نمودار و تابع داده شده می رویم :

$$\frac{۱۳\pi}{۱۸} - \frac{\pi}{۱۸} = \frac{۱۲\pi}{۱۸} = \frac{۲\pi}{۳} \quad \to \quad \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{۳} \quad \to \quad \boxed{b = ۳} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a + b = -۱ + ۳ = ۲}$$

❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀

۳۳- گزینه ۳

طرف دوم تساوی را به کمک اتحاد مزدوج ، ساده می کنیم :

$$\sin 4x = \left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)\underbrace{\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}_{1} \quad \rightarrow \quad \sin 4x = \underbrace{\sin^2 x - \cos^2 x}_{-\cos 2x} \quad \rightarrow \quad \boxed{\sin 4x = -\cos 2x}$$

$$\rightarrow \quad 2\sin 2x \cos 2x = -\cos 2x \quad \rightarrow \quad \cos 2x\left(2\sin 2x + 1\right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \quad \rightarrow \quad 2x = k\pi + \dfrac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}} \\ 2\sin 2x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \sin 2x = -\dfrac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2x = 2k\pi - \dfrac{\pi}{6} \quad \rightarrow \quad \boxed{x = k\pi - \dfrac{\pi}{12}} \\ 2x = 2k\pi + \pi + \dfrac{\pi}{6} \quad \rightarrow \quad \boxed{x = k\pi + \dfrac{7\pi}{12}} \end{cases} \end{cases}$$

حال با مقدار دهی به k ، جواب های موجود در بازه $[0 , \pi]$ را مشخص کرده و مجموع آنها را محاسبه می کنیم :

$$\frac{\pi}{4} , \frac{7\pi}{12} , \frac{3\pi}{4} , \frac{11\pi}{12} \quad \Rightarrow \quad \text{مجموع جوابها} = \frac{30\pi}{12} = \boxed{\frac{5\pi}{2}}$$

سوال : آیا روش دیگری برای حل معادله ی قرمز رنگ که در کادر مشخص شده است وجود دارد ؟

❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀❀

۳۴- گزینه ۳

در مجهول یابی در این نمودارها ، اولین اقدام مشخص کردن علامت های مجهولات چسبیده به سینوس یا کسینوس می باشد که با توجه به شروع نمودار ، این علامت ها قابل شناسایی هستند .

در این تست با تابع $y = 1 + a\sin(bx - \frac{\pi}{6})$ مواجه هستیم که دو ضریب چسبیده به سینوس وجود دارد(a و b).

به شروع نمودار (محل برخورد نمودار تابع با محور عرض ها) دقت می کنیم ، تابع شروع – نزول است بنابراین علامت پشت سینوس و ضریب x موجود در کمان باید مختلف العلامه باشند . به طور دلخواه a را مثبت و b را منفی در نظر می گیریم و در صورت نبودن جواب به دست آمده در گزینه ها باید علامت ها را برعکس کنیم !!!

به سراغ نمودار و اطلاعات موجود در تابع می رویم تا مجهولات را بیابیم . در نمودار داده شده ، قله ی تابع (ماکزیمم) داده شده است . طبق رابطه ی تعیین ماکزیمم می دانیم در توابع $y = a + b\sin(cx)$ یا

$y = a + b\cos(cx)$ مقادیر ماکزیمم و مینیمم از رابطه ی $a \pm |b|$ تعیین می شوند که با توجه به مثبت شدن علامت a در این تست ، مقدار ماکزیمم برابر با $\boxed{a = 0/5}$ $\rightarrow$ $1 + a = 1/5$ می شود .

برای پیدا کردن b به سراغ دوره تناوب در نمودار و تابع داده شده می رویم :

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \xrightarrow{b < 0} \frac{2\pi}{-b} = \pi \rightarrow b = -2 \rightarrow \boxed{a + b = -\frac{3}{2}}$$

ملاحظه می شود که این پاسخ ، در گزینه ها وجود ندارد که البته پاسخ درستی است !

حال فرض مربوط به علامت های a و b را عوض می کنیم و مسئله را یک بار دیگر حل می کنیم :

$$Max = 1 + |a| \xrightarrow{a < 0} 1 - a = 1/5 \rightarrow \boxed{a = -0/5}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \xrightarrow{b > 0} \frac{2\pi}{b} = \pi \rightarrow b = 2 \rightarrow \boxed{a + b = \frac{3}{2}}$$

تذکر : در این مثال به طور اتفاقی جواب های نهایی در دو حالت قرینه یکدیگر شدند اما همیشه به این صورت نیست . یعنی اگر در یک مسئله دیگر ، مجهولات را پیدا کردیم و پاسخ در گزینه ها نبود ، نباید قرینه ی پاسخ به دست آمده را انتخاب کنیم بلکه باید یک بار دیگر مسئله را با تغییر دادن علامت های مجهولات ، حل کنیم .

نکته : عدد ۱ که در نمودار داده شده است ، معلوم نیست به چه نیتی بوده است . زیرا نه ماکزیمم است ، نه مینیمم است و نه محل برخورد تابع با محور عرض ها . و ملاحظه شد که در روند حل سوال هم به کارمان نیامد !

❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊❊

۳۵ -گزینه ۱

در این تست تنها یک مجهول مربوط به دوره ی تناوب وجود دارد که با به کار بردن رابطه ی دوره ی تناوب ، به راحتی می توانیم ، مجهول خواسته شده را تعیین کنیم :

$$T = \frac{2\pi}{|m|} = 4\pi \rightarrow \boxed{m = \pm\frac{1}{2}}$$

$$y_{(\frac{16\pi}{3})} = \frac{1}{2} + 2\cos(\pm\frac{8\pi}{3}) = \frac{1}{2} + 2 \times (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$$

توجه داریم که علامت ضریب x در تابع کسینوس ، تاثیری در رفتار تابع ندارد زیرا کسینوس منفی خور است .

و همچنین زاویه ی $\frac{8\pi}{3}$ همان ۴۸۰ درجه است که بعد از یک دور کامل زدن در دایره ، روی زاویه ی ۱۲۰ درجه قرار می گیرد که کسینوس آن ، $-\frac{1}{2}$ است .

****

۳۶ - گزینه ۳

$$\frac{1}{\sin 15}-\frac{1}{\cos 15}=\frac{\cos 15-\sin 15}{\sin 15\cos 15}=\frac{?}{\frac{1}{2}\sin 30}=\frac{?}{\frac{1}{4}}=2\sqrt{2}$$

$$\cos 15-\sin 15=? \quad \to \quad (\cos 15-\sin 15)^2=?^2 \quad \to \quad \underbrace{\cos^2 15+\sin^2 15}_{1}-\underbrace{2\cos 15\sin 15}_{\sin 30=\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

$$\to \boxed{?=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

دو علامت برای عبارت $\cos 15-\sin 15$ به دست آمده است و از آنجاییکه زاویه ی ۱۵ درجه به محور کسینوسها نزدیکتر است بنابراین مقدار کسینوس آن بیشتر از سینوس آن است و جواب مثبت پذیرفته است :

$$\frac{1}{\sin 15}-\frac{1}{\cos 15}=\frac{\cos 15-\sin 15}{\sin 15\cos 15}=\frac{?}{\frac{1}{2}\sin 30}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{4}}=\boxed{2\sqrt{2}}$$

راه دوم : با کمک اتحاد $\cos x-\sin x=-\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$ ، می توانیم صورت کسر را ساده کنیم :

$$\frac{1}{\sin 15}-\frac{1}{\cos 15}=\frac{\cos 15-\sin 15}{\sin 15\cos 15}=\frac{-\sqrt{2}\sin(15-45)}{\frac{1}{2}\sin 30}=\frac{-\sqrt{2}\sin(-30)}{\frac{1}{2}\sin 30}=\frac{\sqrt{2}\cancel{\sin 30}}{\frac{1}{2}\cancel{\sin 30}}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$$

****

۳۷-گزینه ۴

در این تست تنها یک مجهول مربوط به دوره ی تناوب وجود دارد که با به کار بردن رابطه ی دوره ی تناوب ، به راحتی می توانیم ، مجهول خواسته شده را تعیین کنیم :

$$T=\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{|m|}\to|m|=3\to\boxed{m=\pm 3}$$

با توجه به شروع نمودار که نزولی است و برعکس تابع سینوس است ، باید علامت های ضرایب چسبیده به سینوس با یکدیگر متفاوت باشند ، علامت پشت سینوس منفی است بنابراین علامت ضریب x که همان m است باید مثبت باشد . بنابراین از دو مقدار به دست آمده برای m ، مقدار مثبت را انتخاب می کنیم .

$$m=3 \quad \to \quad y=1-\sin 3x\to y_{\frac{7\pi}{6}}=1-\sin 3(\frac{7\pi}{6})=1-\sin(\frac{7\pi}{2})=1-(-1)=\boxed{2}$$

****

۳۸ -گزینه ۱

در مجهول یابی در این نمودارها ، اولین اقدام مشخص کردن علامت های مجهولات چسبیده به سینوس یا کسینوس می باشد که با توجه به شروع نمودار ، این علامت ها قابل شناسایی هستند .

در این تست با تابع $y=a+b\cos(\frac{\pi x}{۲})$ مواجه هستیم . تنها یک ضریب چسبیده به کسینوس وجود دارد که b است . به شروع نمودار (محل برخورد نمودار تابع با محور عرض ها) دقت می کنیم ، تابع شروع – صعود است و معکوس تابع کسینوس در حالت استاندارد است بنابراین علامت پشت کسینوس باید منفی باشند . ضریب x در نمودارهای کسینوسی تاثیری در اصلی یا برعکس بودن تابع ندارد .

با مشخص شدن علامت b ، به سراغ نمودار و اطلاعات موجود در تابع می رویم تا مجهولات را بیابیم . در نمودار داده شده ، قله ی تابع (ماکزیمم) معلوم است . طبق رابطه ی تعیین ماکزیمم می دانیم در توابع $y=a+b\sin(cx)$ یا $y=a+b\cos(cx)$ مقادیر ماکزیمم و می نیمم از رابطه ی $a\pm|b|$ تعیین می شوند که با توجه به منفی شدن علامت b در این تست ، مقدار ماکزیمم برابر با $a-b=۴$ می شود که اولین رابطه میان این دو مجهول است .

برای پیدا کردن دومین رابطه میان این دو مجهول ، از نقطه ی کمکی که در شکل داده شده است کمک می گیریم (توجه داریم که این نقطه برای موضوع دوره تناوب کاربردی ندارد زیرا در تابع داده شده ، ضریب x ، مجهول نیست و اساسا موضوع دوره تناوب در این تست هیچ استفاده ای ندارد و موضوع دوره تناوب در تست هایی به کار می رود که در داخل کمان ، ضریب x ، مجهول باشد) .

نقطه ی کمکی $(۰\,,۴)$ را در تابع قرار می دهیم تا به دومین معادله بین دو مجهول داده شده دست پیدا کنیم و با کمک دستگاه دو معادله و دو مجهول ، مجهولات را بیابیم :

$$y=a+b\cos(\frac{\pi x}{۲})\xrightarrow{(۴\,,۰)}۰=a+b\cos(\underbrace{\frac{۴\pi}{۲}}_{۲\pi})\to ۰=a+b(۱)\longrightarrow\boxed{a+b=۰}$$

$$\begin{cases}a-b=۴\\a+b=۰\end{cases}\xrightarrow{\oplus}۲a=۴\to\boxed{a=۲\,,b=-۲}$$

****

۳۹ -گزینه ۳

در مجهول یابی در این نمودارها ، اولین اقدام مشخص کردن علامت های مجهولات چسبیده به سینوس یا کسینوس می باشد که با توجه به شروع نمودار ، این علامت ها قابل شناسایی هستند .

در این تست با تابع $y=1+a\sin(b\pi x)$ مواجه هستیم که دو ضریب چسبیده به سینوس وجود دارد(a و b). به شروع نمودار (محل برخورد نمودار تابع با محور عرض ها) دقت می کنیم ، تابع شروع – صعود است بنابراین علامت پشت سینوس و ضریب x موجود در کمان باید یکسان باشند . به طور دلخواه a را مثبت و b را هم مثبت در نظر می گیریم و در صورت نبودن جواب به دست آمده در گزینه ها باید علامت ها را برعکس کنیم !!!

البته با توجه به گزینه ها که همگی مثبت هستند ، انتخاب علامت مثبت برای a و b اقدامی صحیح است .

به سراغ نمودار و اطلاعات موجود در تابع می رویم تا مجهولات را بیابیم . در نمودار داده شده، دره ی تابع (مینیمم) داده شده است . طبق رابطه ی تعیین می نیمم می دانیم در توابع $y=a+b\sin(cx)$ یا $y=a+b\cos(cx)$ مقادیر ماکزیمم و می نیمم از رابطه ی $a\pm|b|$ تعیین می شوند که با توجه به مثبت شدن علامت a در این تست ، مقدار می نیمم برابر با $1-(+a)=-1 \to 1-a=-1 \to \boxed{a=2}$ می شود .

برای پیدا کردن b به سراغ دوره تناوب در نمودار و تابع داده شده می رویم . دوره تناوب با کمک تابع داد شده به صورت : $T=\frac{2\pi}{|b\pi|}=\xrightarrow{b>0}\boxed{\frac{2}{b}}$ تعیین می شود و با کمی دقت در نمودار ملاحظه می شود که با دو سیکل کامل از تابع سینوس یعنی $2T$ مواجه هستیم که برابر با $\frac{4}{3}$ است بنابراین $2T=\frac{4}{3}\to\boxed{T=\frac{2}{3}}$ خواهد بود و با برابر قرار دادن این دوره ی تناوب به دست آمده با دوره ی تناوب ایجاد شده از تابع خواهیم داشت :

$$\frac{2}{b}=\frac{2}{3}\to\boxed{b=3}$$

خواسته ی سوال $a+b$ است که مقدار آن ۵ خواهد بود .

****

۴۰ -گزینه ۲

با کمان هایی با مضارب کوچک زاویه ی $\frac{\pi}{4}$ مواجه هستیم که همگی مضارب فرد زاویه ی $\frac{\pi}{4}$ هستند و می دانیم در دایره ی مثلثاتی ، مضارب فرد زاویه ی $\frac{\pi}{4}$ همگی در وسط نواحی قرار می گیرند . با شمارش این مضارب ، جای زوایای داده شده در نواحی دایره ی مثلثاتی معلوم می شود :

زاویه ی $\frac{11\pi}{4}$ در وسط ناحیه دوم است و تانژانت آن برابر با ۱- است .

زاویه ی $\frac{15\pi}{4}$ در وسط ناحیه چهارم است و سینوس آن برابر با $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ است .

زاویه ی $\frac{13\pi}{4}$ در وسط ناحیه سوم است و کسینوس آن برابر با $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ است .

با محاسبه ی این مقادیر ، خواسته ی سوال تعیین می شود :

$$\tan\frac{11\pi}{4}+\sin\frac{15\pi}{4}\cos\frac{13\pi}{4}=-1+(-\frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2})=-1+\frac{1}{2}=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽✽

۴۱ -گزینه ۴

در مجهول یابی در این نمودارها ، اولین اقدام مشخص کردن علامت های مجهولات چسبیده به سینوس یا کسینوس می باشد که با توجه به شروع نمودار ، این علامت ها قابل شناسایی هستند .

در این تست ابتدا با استفاده از اتحاد $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ ، تابع را تبدیل می کنیم که به تابع با تابع $y=1+\frac{a}{2}\sin(bx)$ می رسیم که دو ضریب چسبیده به سینوس وجود دارد(a و b). به شروع نمودار (محل برخورد نمودار تابع با محور عرض ها) دقت می کنیم ، تابع شروع – صعود است بنابراین علامت پشت سینوس و ضریب x موجود در کمان باید یکسان باشند . به طور دلخواه a را مثبت و b را هم مثبت در نظر می گیریم و در صورت نبودن جواب به دست آمده در گزینه ها باید علامت ها را برعکس کنیم !!!

البته با توجه به گزینه ها که همگی مثبت هستند ، انتخاب علامت مثبت برای a و b اقدامی صحیح است .

به سراغ نمودار و اطلاعات موجود در تابع می رویم تا مجهولات را بیابیم . در نمودار داده شده، دره ی تابع (مینیمم) داده شده است . طبق رابطه ی تعیین می نیمم می دانیم در توابع $y=a+b\sin(cx)$ یا $y=a+b\cos(cx)$ مقادیر ماکزیمم و می نیمم از رابطه ی $a\pm|b|$ تعیین می شوند . در این تست ، هم ماکزیمم و هم می نیمم داده شده است که تنها کی از آنها کاربرد دارد و با به کار بردن هر کدام از آنها می توانیم مجهول a را پیدا کنیم .

از می نیمم کمک می گیریم و با توجه به مثبت شدن علامت a در این تست ، مقدار می نیمم برابر با $1-(+\frac{a}{2})=\frac{1}{2}\rightarrow 1-\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\rightarrow\boxed{a=1}$ می شود .

سوال : آیا با به کار بردن ماکزیمم هم ، همین مقدار برای a به دست می آید ؟

برای پیدا کردن b به سراغ دوره تناوب در نمودار و تابع داده شده می رویم . دوره تناوب با کمک تابع داد شده به صورت : $\boxed{\frac{2\pi}{b}} \xrightarrow{b>0} = \frac{2\pi}{|b|} = T$ تعیین می شود و با کمی دقت در نمودار ملاحظه می شود که با کم کردن دو مقدار داده شده روی محور طول ها با یک سیکل کامل از تابع سینوس یعنی T مواجه هستیم که برابر با $\frac{3\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \pi$ است بنابراین $\boxed{T=\pi}$ خواهد بود و با برابر قرار دادن این دوره تناوب به دست آمده با دوره تناوب ایجاد شده از تابع خواهیم داشت :

$$\frac{2\pi}{b} = \pi \rightarrow \boxed{b=2}$$

خواسته ی سوال $a+b$ است که مقدار آن ۳ خواهد بود .

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

۴۲ - گزینه ۱

در سمت چپ معادله ی داده شده با عبارت $\sin^3 x + \cos^3 x$ مواجه هستیم که با کمک اتحاد چاق و لاغر باید آن را ساده کنیم :

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} - \underbrace{\sin x \cos x}_{\frac{1}{2}\sin 2x}) = (\sin x + \cos x)(1 - \frac{1}{2}\sin 2x)$$

عبارت قرمز رنگ ایجاد شده در سمت چپ معادله ، دقیقا برابر با عبارت داده شده در سمت راست معادله است که قابل ساده شدن هستند . اما حواسمان هست که اگر عبارتی ضربی را از طرفین یک معادله ساده کردیم ، ریشه های آن عبارت ضربی را هم به عنوان ریشه های معادله باید در نظر بگیریم :

$$(\sin x + \cos x)(\cancel{1 - \frac{1}{2}\sin 2x}) = \cancel{1 - \frac{1}{2}\sin 2x} \rightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 1 \rightarrow \boxed{x = 0 \, , \, \frac{\pi}{2} \, , \, 2\pi} \\ 1 - \frac{1}{2}\sin 2x = 0 \rightarrow \sin 2x = 2 \ \times \end{cases}$$

از دو معادله ی ایجاد شده ، معادله ی اول که در گروه " معادلات آشنا " در ابتدای فصل مثلثات در جزوه مورد بررسی قرار گرفته است و ریشه های آن به راحتی محاسبه شد . دومین معادله هم مشخص است که ریشه ای ندارد زیرا مقدار سینوس هیچ زاویه ای برابر با ۲ نخواهد شد . بنابراین مجموع جواب های معادله در بازه ی داده شده در صورت سوال برابر با $0 + \frac{\pi}{2} + 2\pi = \boxed{\frac{5\pi}{2}}$ خواهد شد .

****

۴۳ -گزینه ۲

با کمان هایی با مضارب نسبتا بـزرگ زوایـای $\frac{\pi}{۳}$, $\frac{\pi}{۶}$ مواجـه هسـتیم کـه بـا عملیـات تقسـیم مـی تـوانیم ایـن مضـارب را کوچک کنیم .

برای زاویه ی $\frac{۱۷\pi}{۶}$ ، از تقسیم عـدد ۱۷ بـر ۶ ، خـارج قسـمت ۲ و باقیمانـده ۵ اسـت ، بنـابراین زاویـه ی $\frac{۱۷\pi}{۶}$ ، معـادل بـا زاویه ی $(\frac{۵\pi}{۶}+۰)$ است که همان ۱۵۰ درجه اسـت و بـا تجسـم آن در دایـره ، سـینوس ایـن زاویـه ، کوچیکـه مـی شـود و مقدار تانژانت آن هم کوچیکه تقسیم بر بزرگه است که عدد $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است .

می دانیم در این تقسیم هـا اگـر خـارج قسـمت عـددی فـرد شـود ، از π ، و اگـر عـددی زوج شـود از صـفر اسـتفاده مـی کنیم و باقیمانده را در زاویه ی بدون مضرب ، ضرب می کنیم .

برای زاویه ی $\frac{۱۱\pi}{۳}$ ، از تقسیم عـدد ۱۱ بـر ۳ ، خـارج قسـمت ۳ و باقیمانـده ۲ اسـت ، بنـابراین زاویـه ی $\frac{۱۱\pi}{۳}$ ، معـادل بـا زاویه ی $(\frac{۲\pi}{۳}+\pi)$ است که همـان ۳۰۰ درجـه اسـت و بـا تجسـم آن در دایـره ، سـینوس ایـن زاویـه ، بزرگـه مـی شـود و مقدار آن هم $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است .

برای زاویه ی $\frac{۱۰\pi}{۳}$ ، از تقسـیم عـدد ۱۰ بـر ۳ ، خـارج قسمت ۳ و باقیمانـده ۱ اسـت ، بنـابراین زاویـه ی $\frac{۱۰\pi}{۳}$ ، معـادل با زاویه ی $(\frac{\pi}{۳}+\pi)$ اسـت کـه همـان ۲۴۰ درجـه اسـت و بـا تجسـم آن در دایـره ، کسـینوس ایـن زاویـه ، کوچیکـه مـی شود و مقدار آن هم $-\frac{۱}{۲}$ است .

$$\underbrace{\tan(\frac{۱۷\pi}{۶})}_{-\frac{\sqrt{۳}}{۳}}\underbrace{\sin(\frac{۱۱\pi}{۳})}_{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}+\underbrace{\cos(\frac{۱۰\pi}{۳})}_{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۳}{۶}-\frac{۱}{۲}=\boxed{۰}$$

****

۴۴ -گزینه ۱

بـرای تعیـین دوره ی تنـاوب ، بایـد بـدانیم کـه تنهـا دوره ی تنـاوب توابـع بـه فـرم **$\sin ax , \cos ax , \tan ax , \cot ax$** را بلد هستیم و هر تابع دیگری که داده شد باید با کمـک اتحادهـای مثلثـاتی ، بـه یکـی از ایـن ۴ تـابع بـالا تبـدیل کنـیم . در

این تست با کمک اتحاد $\tan U-\cot U=-2\cot 2U$ ، تابع داده شده را تبدیل می کنیم و دوره ی تناوب تابع تک نسبتی شده را به راحتی تعیین می کنیم :

$$\tan \pi x-\cot \pi x=-2\cot 2\pi x \rightarrow T=\frac{\pi}{2\pi}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

توجه داریم که ضریب پشت تک نسبتی ها ، تاثیری در دوره ی تناوب ندارد و دوره تناوب توابع تانژانت و کتانژانت ، از تقسیم π بر ضریب x به دست می آید .

****

۴۵ -گزینه ۴

در سمت چپ معادله ی داده شده با عبارت $\sin^4 x+\cos^4 x$ مواجه هستیم که با کمک اتحاد های مربوط به روابط جبری باید آن را کمی ساده کنیم :

$$\boxed{\sin^4 x+\cos^4 x}=(\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1})^2-2\underbrace{\underbrace{\underbrace{\sin^2 x\cos^2 x}_{(\sin x\cos x)^2}}_{\frac{1}{2}\sin 2x}}_{\frac{1}{4}\sin^2 2x}=(1)-2(\frac{1}{4}\sin^2 2x)=\boxed{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}$$

با برابر قرار دادن عبارت به دست آمده با عدد داده شده در سمت راست معادله ، خواهیم داشت :

$$1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{1}{2} \rightarrow \cancel{-\frac{1}{2}}\sin^2 2x=\cancel{-\frac{1}{2}} \rightarrow \sin^2 2x=1 \rightarrow \sin 2x=\pm 1 \rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2} \rightarrow \boxed{x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}}$$

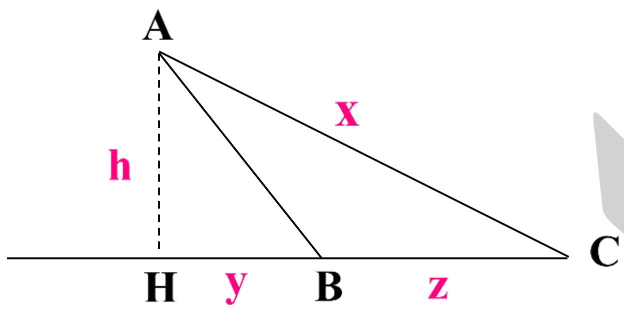
با نمایش نقاط $x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ در دایره ، به ۴ نقطه در وسط نواحی می رسیم که به ترتیب $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$ خواهند بود و مجموع جواب های معادله در بازه ی داده شده در صورت سوال برابر با $\frac{7\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=16\frac{\pi}{4}=\boxed{4\pi}$ خواهد شد .

****

سوال و پاسخ تستهای کنکورسراسری داخل کشور گروه ریاضی در سال ۹۹ مربوط به مبحث " مثلثات"

سراسری ریاضی داخل کشور ۹۹ - سوال ۱۰۹ دفترچه

۱۰۹ - در شکل زیر ، فرض کنید $\sin C = \frac{۵}{۱۳}$ و $CH = ۹$ ، اندازه ی ارتفاع AH کدام است ؟(مناسب برای داوطلبان گروه تجربی)



۱) ۳/۲۵

۲) ۳/۵

۳) ۳/۶

۴) ۳/۷۵

پاسخ – گزینه ۴ :

با نام گذاری هایی که در شکل ، برای اضلاع انجام داده ایم روابط مثلثاتی را در مثلث AHC به کار می بریم و می دانیم که روابط مثلثاتی صرفا برای مثلث های قائم الزاویه کاربرد دارند : $\sin C = \frac{h}{x} = \frac{۵}{۱۳} \rightarrow \boxed{x = \frac{۱۳}{۵}h}$

در مثلث AHC ، با به کار بردن رابطه ی فیثاغورت خواهیم داشت : $x^۲ = ۸۱ + h^۲$ و با جایگذاری رابطه ی $x = \frac{۱۳}{۵}h$ در رابطه ی فیثاغورت ایجاد شده ، مجهول مسئله را پیدا می کنیم :

$$x^۲ = ۸۱ + h^۲ \xrightarrow{x = \frac{۱۳}{۵}h} \frac{۱۶۹}{۲۵}h^۲ = ۸۱ + h^۲ \rightarrow \frac{۱۶۹}{۲۵}h^۲ - h^۲ = ۸۱ \rightarrow \frac{۱۴۴}{۲۵}h^۲ = ۸۱ \xrightarrow{\sqrt{\ }} \frac{۱۲}{۵}h = ۹$$

$$\rightarrow ۱۲h = ۴۵ \rightarrow h = \frac{۴۵}{۱۲} = \frac{۱۵}{۴} = \boxed{۳/۷۵}$$

****

سراسری ریاضی داخل کشور ۹۹ - سوال ۱۱۰ دفترچه

۱۱۰ - اگر انتهای کمان α در ربع دوم دایره ی مثلثاتی و $\sin\alpha = \frac{\sqrt{۲}}{۱۰}$ باشد ، $\cos(\frac{۱۱\pi}{۴} + \alpha)$ ، کدام است ؟

۱) $-\frac{۴}{۵}$

۲) $-\frac{۳}{۵}$

۳) $\frac{۳}{۵}$

۴) $\frac{۴}{۵}$

پاسخ – گزینه ۳ :

ابتدا محل قرار گیری زاویه ی $\frac{11\pi}{4}$ را در دایره ی مثلثاتی مشخص می کنیم . می دانیم مضارب فرد زاویه ی $\frac{\pi}{4}$ در وسط نواحی مثلثاتی قرار دارند ، بنابراین با شمارش مضارب فرد در وسط نواحی ، ملاحظه می شود که زاویه ی $\frac{11\pi}{4}$ ، در وسط ناحیه ی دوم یعنی روی زاویه ی $\frac{3\pi}{4}$ قرار می گیرد .

حال بسط کسینوس را به صورت زیر می نویسیم :

$$\cos(\frac{11\pi}{4}+\alpha)=\cos(\frac{3\pi}{4}+\alpha)=\cos(\frac{3\pi}{4})\cos(\alpha)-\sin(\frac{3\pi}{4})\sin(\alpha)=(-\frac{\sqrt{2}}{2})\cos\alpha-(\frac{\sqrt{2}}{2})\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)$$

در صورت سوال $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$ داده شده است و با کمک اتحاد $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ و با توجه به اینکه ، زاویه ی α در ناحیه دوم قرار دارد ، مقدار کسینوس آلفا را محاسبه می کنیم که به عدد $\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{2}{100}}=-\sqrt{\frac{98}{100}}=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$ می رسیم و با جایگذاری در رابطه ی $-\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)$ ، به خواسته ی سوال می رسیم :

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)=-\frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{7\sqrt{2}}{10}+\frac{\sqrt{2}}{10})=-\frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{6\sqrt{2}}{10})=\frac{6}{10}=\boxed{\frac{3}{5}}$$

****

سراسری ریاضی داخل کشور ۹۹ – سوال ۱۱۱ دفترچه

۱۱۱ – مجموع جواب های معادله ی مثلثاتی $\tan(3x)\tan(x)=1$ ، در بازه ی $[\pi , 2\pi]$، کدام است ؟

۱) 5π ۲) 6π ۳) $\frac{9\pi}{2}$ ۴) $\frac{11\pi}{2}$

پاسخ – گزینه ۲ :

معادله ی داده شده ، دقیقا مشابه معادله ی موجود در تست شماره ۲۱ (سراسری تجربی ۹۷) طراحی شده است و فقط کافیست جواب های معادله در بازه ی داده شده را تعیین ، و با یکدیگر جمع کنیم :

کافیست یکی از تانژانت های داده شده را معکوس کنیم و به کتانژانت تبدیل کنیم و سپس طرفین وسطین کنیم تا به یکی از فرم های مقدماتی معادلات مثلثاتی برسیم :

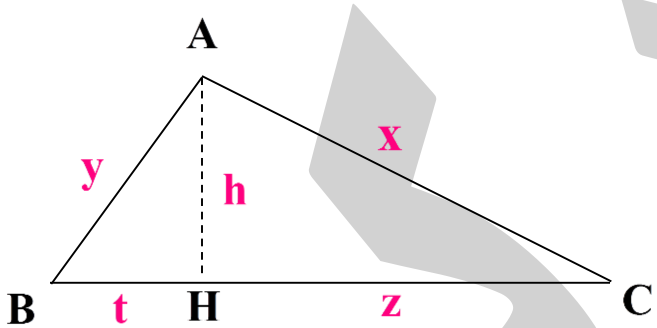
$$(\frac{1}{\cot x})(\tan 3x)=1 \rightarrow \tan 3x=\cot x \rightarrow \tan 3x=\tan(\frac{\pi}{2}-x)\rightarrow 3x=k\pi+\frac{\pi}{2}-x \rightarrow 4x=k\pi+\frac{\pi}{2}\rightarrow \boxed{x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}}$$

$$x=\frac{k\pi}{۴}+\frac{\pi}{۸}\rightarrow\begin{cases}k=۴\rightarrow x=\frac{۹\pi}{۸}\\ k=۵\rightarrow x=\frac{۱۱\pi}{۸}\\ k=۶\rightarrow x=\frac{۱۳\pi}{۸}\\ k=۷\rightarrow x=\frac{۱۵\pi}{۸}\end{cases}\rightarrow\quad\frac{۹\pi}{۸}+\frac{۱۱\pi}{۸}+\frac{۱۳\pi}{۸}+\frac{۱۵\pi}{۸}=\frac{۴۸\pi}{۸}=\boxed{۶\pi}$$

سوال و پاسخ تستهای کنکورسراسری خارج کشور گروه ریاضی در سال ۹۹ مربوط به مبحث " مثلثات"

سراسری ریاضی خارج کشور ۹۹ - سوال ۱۰۹ دفترچه

۱۰۹ - در شکل زیر ، فرض کنید $\cot C=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ و $AC=۹۶$ ، اندازه ی ارتفاع AH کدام است ؟(مناسب برای داوطلبان گروه تجربی)



۱) ۴۸

۲) ۵۶

۳) ۶۴

۴) ۷۲

پاسخ - گزینه ۳ :

با نام گذاری هایی که در شکل ، برای اضلاع انجام داده ایم روابط مثلثاتی را در مثلث **AHC** به کار می بریم و می دانیم که روابط مثلثاتی صرفا برای مثلث های قائم الزاویه کاربرد دارند با فرض $\cot C=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ، میتوانیم با استفاده از اتحاد $۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}$ ، مقدار سینوس زاویه ی C را تعیین کنیم و از تقسیم ضلع مقابل (همان ارتفاع مثلث) به وتر ، ارتفاع خواسته شده را تعیین کنیم :

$$1+\cot^۲ C=\frac{۱}{\sin^۲ C} \rightarrow 1+(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^۲=\frac{۱}{\sin^۲ C} \rightarrow \frac{۱}{\sin^۲ C}=1+\frac{۵}{۴}=\frac{۹}{۴} \rightarrow \sin^۲ C=\frac{۴}{۹} \rightarrow \boxed{\sin C=\frac{۲}{۳}}$$

$$\sin C=\frac{h}{x} \rightarrow \frac{۲}{\cancel{۳}}=\frac{h}{\underbrace{\cancel{۹۶}}_{۳۲}} \rightarrow \boxed{h=۶۴}$$

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

سراسری ریاضی خارج کشور ۹۹ - سوال ۱۱۰ دفترچه

۱۱۰ – اگر انتهای کمان α در ربع اول دایره ی مثلثاتی و $\tan\alpha=\frac{۱}{۷}$ باشد ، مقدار $\sin(\frac{۱۳\pi}{۴}+\alpha)$، کدام است ؟

۱) $-\frac{۴}{۵}$ ۲) $-\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

پاسخ – گزینه ۳ :

ابتدا محل قرار گیری زاویه ی $\frac{۱۳\pi}{۴}$ را در دایره ی مثلثاتی مشخص می کنیم . می دانیم مضارب فرد زاویه ی $\frac{\pi}{۴}$ در وسط نواحی مثلثاتی قرار دارند ، بنابراین با شمارش مضارب فرد در وسط نواحی ، ملاحظه می شود که زاویه ی $\frac{۱۳\pi}{۴}$ ، در وسط ناحیه ی سوم یعنی روی زاویه ی $\frac{۵\pi}{۴}$ قرار می گیرد .

حال بسط سینوس را به صورت زیر می نویسیم :

$$\sin(\frac{۱۳\pi}{۴}+\alpha)=\sin(\frac{۵\pi}{۴}+\alpha)=\sin(\frac{۵\pi}{۴})\cos(\alpha)+\cos(\frac{۵\pi}{۴})\sin(\alpha)=(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})\cos\alpha+(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})\sin\alpha=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos\alpha+\sin\alpha)$$

در صورت سوال $\tan\alpha=\frac{۱}{۷}$ داده شده است و با کمک اتحاد های $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$ و $1+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$ و با توجه به اینکه ، زاویه ی α در ناحیه اول قرار دارد ، مقادیر کسینوس آلفا و سینوس آلفا را محاسبه می کنیم که خواهیم داشت :

$$1+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha} \xrightarrow{\tan\alpha=\frac{۱}{۷}} 1+(\frac{۱}{۷})^۲=\frac{۱}{\cos^۲\alpha} \rightarrow 1+\frac{۱}{۴۹}=\frac{۱}{\cos^۲\alpha} \rightarrow \cos^۲\alpha=\frac{۴۹}{۵۰}$$

$$\xrightarrow{\alpha\in I} \cos\alpha=\sqrt{\frac{۴۹}{۵۰}}=\sqrt{\frac{۷^۲}{۲۵\times۲}}=\boxed{\frac{۷}{۵\sqrt{۲}}}$$

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱ \xrightarrow{\cos^۲\alpha=\frac{۴۹}{۵۰}} \sin^۲\alpha=۱-\frac{۴۹}{۵۰}=\frac{۱}{۵۰} \xrightarrow{\alpha\in I} \sin\alpha=\boxed{\frac{۱}{۵\sqrt{۲}}}$$

با جایگذاری مقادیر به دست آمده برای سینوس و کسینوس در رابطه ی $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos\alpha+\sin\alpha)$ ، به خواسته ی سوال می رسیم :

$$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos\alpha+\sin\alpha)=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\frac{۷}{۵\sqrt{۲}}+\frac{۱}{۵\sqrt{۲}}\right)=-\frac{\cancel{\sqrt{۲}}}{۲}\left(\frac{۸}{۵\cancel{\sqrt{۲}}}\right)=\boxed{-\frac{۴}{۵}}$$

****

سراسری ریاضی خارج کشور ۹۹ - سوال ۱۱۱ دفترچه

۱۱۱ -جواب های معادله ی مثلثاتی $\sin(x+\frac{\pi}{۶})+\cos(x+\frac{\pi}{۳})=\cos ۲x$ ، کدام است ؟

۱) $x=\frac{۲k\pi}{۳}\ ;\ k\in Z$

۲) $x=\frac{k\pi}{۳}\ ;\ k\in Z$

۳) $x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\ ;\ k\in Z$

۴) $x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\ ;\ k\in Z$

پاسخ – گزینه ۱ : (مشابه تمرین ۱۰۴ جزوه)

ابتدا در سمت چپ معادله ، بسط های مربوط به سینوس و کسینوس را باز می کنیم و معادله را کمی ساده می کنیم :

$$\sin(x+\frac{\pi}{۶})+\cos(x+\frac{\pi}{۳})=\cos ۲x\rightarrow(\sin x\underbrace{\cos\frac{\pi}{۶}}_{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}+\underbrace{\sin\frac{\pi}{۶}}_{\frac{۱}{۲}}\cos x)+(\cos x\underbrace{\cos\frac{\pi}{۳}}_{\frac{۱}{۲}}-\sin x\underbrace{\sin\frac{\pi}{۳}}_{\frac{\sqrt{۳}}{۲}})=\cos ۲x$$

$$\cancel{\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x}+\frac{۱}{۲}\cos x+\frac{۱}{۲}\cos x-\cancel{\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x}=\cos ۲x\rightarrow\boxed{\cos x=\cos ۲x}$$

به معادله ی مقدماتی و ساده ی $\cos x=\cos ۲x$ رسیدیم که به صورت زیر می توانیم مجموعه جواب های آنرا پیدا کنیم :

$$\cos O=\cos\square\rightarrow\begin{cases}O=۲k\pi+\square\\O=۲k\pi-\square\end{cases}\rightarrow\cos x=\cos ۲x\rightarrow\begin{cases}۲x=۲k\pi+x\rightarrow\boxed{x=۲k\pi}\\۲x=۲k\pi-x\rightarrow\boxed{x=\frac{۲k\pi}{۳}}\end{cases}$$

دو مجموعه جواب برای معادله به دست آمده است که اگر این دو مجموعه جواب را روی دایره ی مثلثاتی نمایش دهیم ، می بینیم که مجموعه ی $x=\frac{۲k\pi}{۳}$ ، (سه نقطه ای) پوشش دهنده ی مجموعه ی $x=۲k\pi$ ، (تک نقطه ای) می باشد . بنابراین مجموعه جواب این معادله ، به صورت $x=\frac{۲k\pi}{۳}$ می باشد .